数学思维训练

初中数学思维训练经典题组

（八年级下册）

编　著　韩　涛

参　编　刘丽娟　刘小平

主　审　刘育涛

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京・BEIJING

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

初中数学思维训练经典题组. 八年级. 下册 / 韩涛编著. —北京：电子工业出版社，2016.1

ISBN 978-7-121-27978-2

Ⅰ. ①初… Ⅱ. ①韩… Ⅲ. ①中学数学课—初中—习题集 Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 318802 号

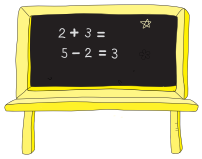
策划编辑：孙清先
责任编辑：郝黎明
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：720×1 000　1/16　印张：10　字数：256 千字
版　　次：2016 年 1 月第 1 版
印　　次：2016 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：25.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

序　言



郑州的平行线教育是近年来办学成绩卓著的一所课外培训学校，在2014 年“华罗庚金杯”少年数学邀请赛中，其学员囊括了郑州市初中前十名中的九名，小高组前十名中的八名。在《大河报》上经常可以看到有关平行线教育的相关报道。平行线的数学教育为补充和提高基础教育做出了良好的成绩，为中学教育选拔和培养了一批又一批优质的幼苗，深受学生、家长、社会的好评。

平行线这所年轻的培训学校、这样一批年轻的教师之所以创出了这样的业绩，靠的是正确的育人理念、拼搏奋斗的团队精神和精益求精的敬业精神；靠的是努力学习钻研、吸取百家之长，转化为自己经验的包容精神，脚踏实地地落实在集体备课、教材建设等基础建设之上。

平行线的数学教学遵循着“现实是基础，兴趣引入门，思维是核心，证明是灵魂”的理念，补充和完善了当前中小学数学基础教育中的不足，体现了高质量的数学素质教育。

每个中小学生都有自己的梦，正是每个人的梦汇集成了伟大的民族梦、中国梦。中国要建设成为世界第一流的强国，人才的培养是关键。而数学是人才培养中极为重要的基础学科。数学是锻炼思维的体操，是打开科学大门的钥匙，是攀登科学高峰的天梯。青少年时期学好数学、喜爱数学，与实现伟大中国梦的大方向完全一致，还是俗话说得好，学好数理化，建设祖国本领大！

平行线教育编写的“数学思维训练”丛书，值得有志于学好数学的同学选读。读一读、算一算，想一想、做一做，希望通过学习能提高你

的成绩，从中还可以体会：“成绩是开始，品格是永远”的道理。

华罗庚说：“学习科学时，必须掌握知难而进的原则。”

数学家的经验之谈：数学是算懂的，而不是看懂的。当然更不是听懂的。请你记住数学界流传的一句话：“上帝就在细节中！”（God is in the details）

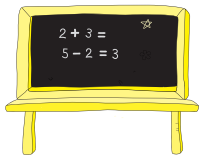
我们坚信，每个人都可以通过刻苦努力学好数学，变得聪明起来！

首都师范大学数学科学学院

周春荔

2014 年 6 月 10 日

前　言



目前，很多家长和中学生只关注中考、高考。因为对于学生而言，这是他们升学前途的唯一途径，是进入高等院校的独木桥。但对于很多优秀的孩子来说，这远远不够。名校的自主招生，国内外的数学竞赛等都会为他们开辟更为广阔的天地，让他们有更大的作为。尤为重要的是数学思想、科学思维体系的构建让他们受益终身。近几年北大、清华、复旦等 985 高校的自主招生比例逐年加大，这部分学校对学生在数学方面的要求也越来越高。为了更好地帮助这些在数学方面有梦想的孩子，本书应运而生。

本书的编写，以中考、名校自主招生、国内外竞赛所需求的能力为导向，而不是简单地割裂它们之间的联系，它具有以下几个特点。

第一、在构建知识体系的基础上更注重构建孩子的思维体系。本书注重讲解基础的数学知识与数学方法，先构建一个知识的平台，彻底夯实学生的基本功。在此基础上，通过多种变式，多个视角，去培养孩子思考问题的习惯，进而形成科学的思考习惯，而这种习惯又会帮助孩子提高对知识体系的认识，形成一个良性循环的学习状态。

第二、突出题组设计——不同难度，同样的方法。

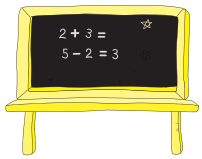
从基础题组入手，通过提出反问题、特殊问题一般化、数量关系复杂化，把问题放在不同背景下，将问题与数论等其他知识相结合，层层拔高，环环相扣，难度不同，却多题归一，本质的方法是一样的。让孩子在获得成就感的同时体会到数学的巨大魅力。

“技巧”是工具，“思路”是能力，建议师生朋友在使用本书的过程中，不仅关注“解题技巧”，更要关注“解题思路”，即使题目披着各种“外衣”，我们也能够找出解题的方法，进而打破只会做原题的“怪圈”。

虽然我们追求精益求精，但难免会有不当的地方，恳请各位同行、广大的师生朋友提出您宝贵的意见。

平行线教育　刘育涛　韩涛　刘丽娟

目　录



第 1 讲　平面直角坐标系、一次函数与直线……1
第 2 讲　反比例函数……25
第 3 讲　二次函数（一）——解析式、图像、性质……38
第 4 讲　二次函数（二）——抛物线的几何变换……48
第 5 讲　二次函数（三）——最值问题……58
第 6 讲　二次函数（四）——与二次方程或不等式的综合问题……65
第 7 讲　二次函数（五）——与几何的综合问题……75
第 8 讲　相似三角形……94
第 9 讲　三角形的内心……111
第 10 讲　三角形的外心……117
第 11 讲　三角形的重心……125
第 12 讲　三角形的垂心……133
第 13 讲　三角形的旁心……142

第1讲

平面直角坐标系、一次函数与直线





内容概要

1. 掌握平面直角坐标系中的点与有序实数对之间一一对应的关系；会求坐标系内某点(a, b)关于x轴、y轴、原点、直线$y=x$、$y=-x$等对称点的坐标；熟练使用中点坐标公式；
2. 掌握一次函数的解析式与图像，增减性与斜率的关系；纵截距与横截距坐标；会根据给定条件（例如增减性、特殊点）推定函数解析式；会用待定系数法求一次函数解析式；
3. 一次函数与直线方程的关系；直线方程的点斜式、斜截式、截距式、两点式、一般式；
4. 平面直角坐标系上，两直线相交、平行、重合、垂直的条件；
5. 了解点到直线的距离公式及其推导过程；
6. 会解决一次函数与平面几何的综合问题，特别注意在探讨某些图形的存在性时考虑问题要全面，不能有遗漏情况；
7. 会解决一些涉及一次函数的整数点问题.



例题与习题

一、基本工具题（下述问题的结论应直接记住，后面许多问题会反复用到）



求解下列问题：

1. 求平面直角坐标系内的点(a,b)关于x轴、y轴、原点、直线$y=x$、$y=-x$的对称点的坐标.



2．我们把一次函数的图像与 x 轴交点的横坐标叫作横截距，与 y 轴交点的纵坐标叫作纵截距．求一次函数 $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 的横截距和纵截距.

3. 我们把一次函数 $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 的参数 k 称为它所对应的直线的斜率. 求过两点 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ 的直线的斜率（假定直线 AB 与 x 轴不垂直）.

4．求满足下列条件的直线方程：

（1）过点 $A(a,b)$，斜率为 k；

（2）斜率为 k，纵截距为 b；

（3）横截距为 a，纵截距为 $b(a\neq 0,b\neq 0)$；

（4）过两点 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$.

5．直线 $l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$

（1）$l_1 // l_2$ 的条件是什么？

（2）l_1, l_2 相交的条件是什么？

（3）$l_1 \perp l_2$ 的条件是什么？

（4）l_1, l_2 关于直线 $y=x$ 对称的条件是什么？

（5）l_1, l_2 关于直线 $y=-x$ 对称的条件是什么？

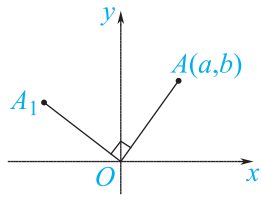
6．设直线方程为 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为 0），求定点 $P(x_0, y_0)$ 到该直线的距离（即点到直线垂线段的长度）.

二、点的坐标

求解下列问题：

1. 平面直角坐标系中的点与_____一一对应.

2. 如下图所示，已知点 $A(a,b)$，O 是原点，$OA=OA_1$，$OA\perp OA_1$，则点 A_1 的坐标是_____.



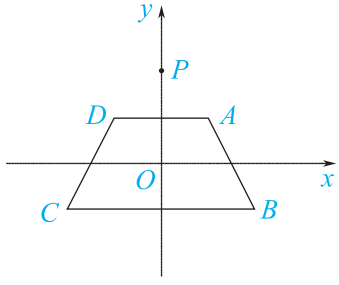
3. 在平面直角坐标系内，有等腰三角形 AOB，O 是坐标原点，点 A 的坐标是(a,b)，底边 AB 的中线在一、三象限的角平分线上，则点 B 的坐标为（　　）.

A. (b,a)　　B. $(-a,-b)$　　C. $(a,-b)$　　D. $(-a,b)$

4. 给机器人下一个指令$[s,A]$（$s\geq 0$，$0\leq A\leq 180^\circ$），它将完成下列动作：① 先在原地向左旋转角度 A；② 再朝它面对的方向沿直线行走 s 个单位长度的距离.

现机器人站立的位置为坐标原点，取它面对的方向为 x 轴的正方向，取它的左侧为 y 轴的正方向，要想让机器人移动到点$(-5,5)$处，应下指令：_____.

5. 如下图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，等腰梯形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为 $A(1,1)$，$B(2,-1)$，$C(-2,-1)$，$D(-1,1)$. y 轴上一点 $P(0,2)$绕点 A 旋转 180 °得点 P_1，点 P_1 绕点 B 旋转 180 °得点 P_2，点 P_2 绕点 C 旋转 180 °得点 P_3，点 P_3 绕点 D 旋转 180 °得点 P_4，……，重复操作依次得到点 P_1，P_2，…，则点 P_{2015} 的坐标是（　　）.



A. $(-2018,0)$

B. $(2015,-2)$

C. $(2014,0)$

D. $(0,2)$

【提示】探究操作过程中点 P 的变化规律是解决问题的关键.

6. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(2,-2)$，点 P 是 y 轴上一点，求出使$\triangle AOP$为等腰三角形的所有点 P 的坐标.

【提示】根据需要进行分类可避免漏解. 比如可以按照哪条边为底边进行分

类，每一类中再根据需要决定是否需要进一步分类.

7．在直角坐标系中，将长方形 $OABC$ 沿 OB 对折，使点 A 落在点 A_1 处．已知 $A(\sqrt{3},0)$，$B(\sqrt{3},1)$，则点 A_1 的坐标是多少.

8．如图 1 所示，等腰梯形 $OABC$ 的底边 OC 在 x 轴上，$AB \parallel OC$，O 为坐标原点，$OA=AB=BC$，$\angle AOC=60°$，连接 OB，点 P 为线段 OB 上一个动点，点 E 为边 OC 的中点.

（1）连接 PA、PE，求证：$PA=PE$；

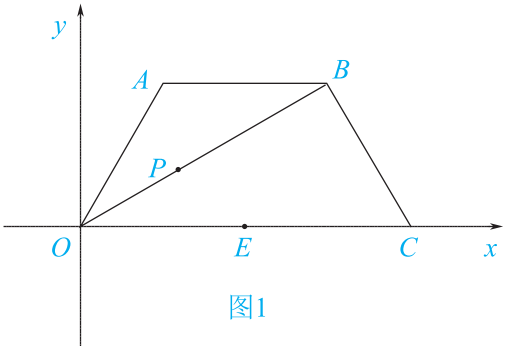


图1

（2）连接 PC，若 $PC+PE=2\sqrt{3}$，试求 AB 的最大值；

（3）在（2）条件下，当 AB 取最大值时，如图 2 所示，点 M 坐标为$(0,-1)$，

点 D 为线段 OC 上一个动点，当 D 点从 O 点向 C 点移动时，直线 MD 与梯形另一边交点为 N，设 D 点横坐标为 m，当△MNC 为钝角三角形时，求 m 的范围.

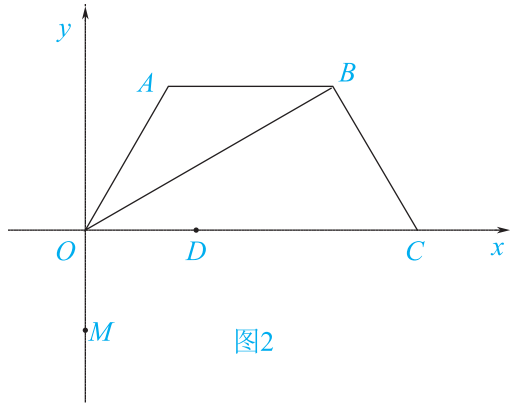
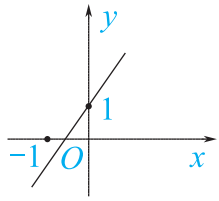


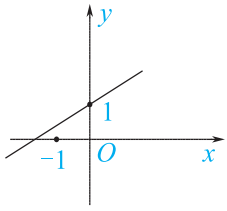
图2

三、一次函数的解析式、图像和基本性质（增减性、斜率、及所过象限）

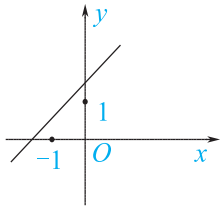
求解下列问题：

1．已知函数 $y=kx+b$ 的图像如下图所示，则 $y=2kx+b$ 的图像可能是（　　）.

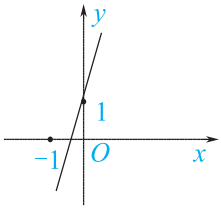




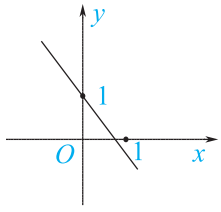
A.



B.

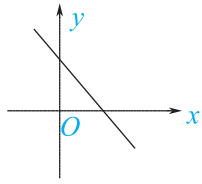


C.

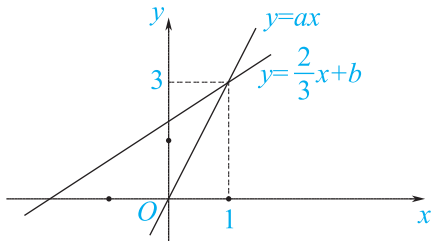


D.

2．直线 $y=mx+n$ 如下图所示，化简 $|m-n|-\sqrt{m^2}=$_____.



3．函数 $y=ax$ 与函数 $y=\frac{2}{3}x+b$ 的图像如下图所示，则关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}ax-y=0\\3y-2x=3b\end{cases}$ 的解是_____.



4．已知一次函数 $y=ax+b$ 的图像经过点 $A(\sqrt{3},\sqrt{3}+2)$，$B(-1,\sqrt{3})$，$C(c,2-c)$，求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值.

5．已知一次函数 $y=ax+b$ 的图像过第一、二、四象限，且与 x 轴交于点(2,0)，则关于 x 的不等式 $a(x-1)-b>0$ 的解集为（　　）.

A．$x<-1$　　B．$x>-1$　　C．$x>1$　　D．$x<1$

6．已知 $abc\neq0$，并且 $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=p$，则直线 $y=px+p$ 一定通过（　　）.

A．第一、二象限　　B．第二、三象限

C．第三、四象限　　D．第一、四象限

【注意】等比定理使用的条件，不要遗漏情况！

7．已知 $k=\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$，且 $\sqrt{m+5}+n^2+9=6n$．问关于

自变量 x 的一次函数 $y=kx+m+n$ 的图像一定经过哪几个象限？

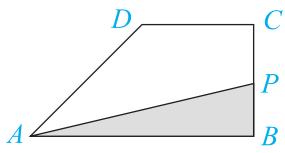
8．已知 a 是方程 $x^3+3x-1=0$ 的一个实数根，则直线 $y=ax+1-a$ 不经过（　　）．

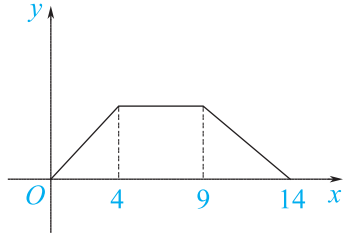
A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限

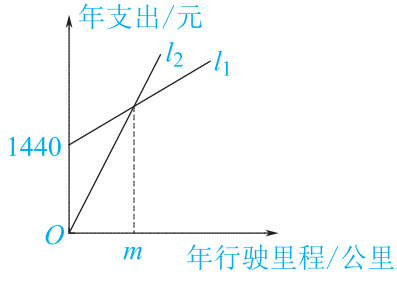
9．如下图所示，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel DC$，$\angle B=90^\circ$．动点 P 从点 B 出发，沿梯形的边由 $B\to C\to D\to A$ 运动．设点 P 运动的路程为 x，$\triangle ABP$ 的面积为 y．把 y 看作 x 的函数，函数的图像如下图所示，则$\triangle ABC$ 的面积为（　　）．

A．10　　B．16　　C．18　　D．32





10．汽车燃油价税费改革从 2009 年元旦起实施：取消养路费，同时汽油消费税每升提高 0.8 元．若某车一年的养路费是 1440 元，百公里耗油 8 升，在“费改税”前后该车的年支出与年行驶里程的关系分别如图中的 l_1、l_2 所示，则 l_1 与 l_2 的交点的横坐标 $m=$_____．（不考虑除养路费和燃油费以外的其他费用．）



11．设$0<k<1$，关于x的一次函数$y=kx+\frac{1}{k}(1-x)$，当$1\leq x\leq 2$时的最大值是多少？

12．不论k为何值，解析式$(2k-1)x-(k+3)y-(k-11)=0$表示的函数图像过一定点，写出这个定点坐标.

13．对于一个固定的实数x，三个函数$y_1=2x$、$y_2=x+2$、$y_3=-2x+12$的最小值设为y，则当x变化时，y的最大值为_____.

14. 设在直角坐标平面上, 求不等式$|x|+|y|\leq 3$围成的多边形的周长与面积.

15．已知曲线由方程$|x-1|+|y-1|=1$确定.

（1）判别曲线所围成的图形的形状；

（2）求所围成的图形的面积.

16.（1）解不等式：$3|x|-x-4>0$

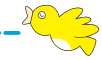
（2）关于 x 的方程 $|x|-ax=1$ 同时有一个正根和一个负根，求：①a 的取值范围；②若 a 是整数，求 a.

17. 求使方程 $|x-1|+|x-2|+2|x-3|=c$ 恰有两个解的所有实数 c.

18. 方程 $|2x-1|-|1+x|=ax$ 有 3 个解，求参数 a 的取值范围.

19．两人约定于 10:00～11:00 在某地会面，先到者等对方 10 分钟，过时就离开．假设两人在 10:00～11:00 的任一时刻都等对方可能到达，求两人能会面的概率．

四、一次函数有关的整数点问题



求解下列问题：

1．一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $A(0,5)$和点 $B(4,0)$，则在该图像和坐标轴围成的三角形内，横坐标和纵坐标都是正整数的点有_____个．

2．直线 $y=\frac{5}{4}x-\frac{95}{4}$ 与 x 轴与 y 轴的交点分别为 A 和 B，则线段 AB 上（包括端点）横坐标和纵坐标都是整数的点有几个？

3．用面值 8 分和 11 分的邮票（不限数量），有多少种资费支付不了？

4．用面值为 a,b（$a>b$）两种邮票（无数量限制）支付邮资，有 35 个资费支付不到，求 a,b.

五、一次函数与几何（这部分是重点，也是难点．特别是一次函数的图像变换，与特殊三角形、四边形的综合问题，面积问题，长度与角度问题，动点问题，点的存在性问题等，需要灵活运用全等、相似、构造对称、寻找不变量，分类讨论等思路和方法）

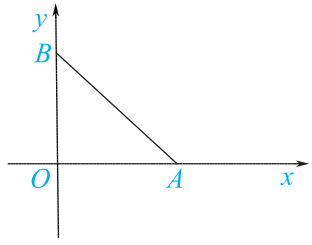
求解下列问题：

【提示】前 4 题属于“将军饮马”问题，采用构造对称的方法较易解决．

1．一束光线从点 $A(a,b)$出发，经过 x 轴上的点 C 反射后经过点 $B(3,3)$，求光线从 A 点到 B 点经过的路线的长度．

2．在平面直角坐标系中有点 $A(2,-1)$，$B(3,3)$，点 P 是 y 轴上一动点，求 P 到 A,B 距离之和最小时的坐标，并求出这个最小距离之和．

3．如下图，一束光线从点 O 射出，照在经过 $A(1,0)$、$B(0,1)$的镜面上的点 D，经 AB 反射后，反射光线又照到竖立在 y 轴位置的镜面，要使最后经 y 轴再反射的光线恰好通过点 A，则点 D 的坐标为_____．



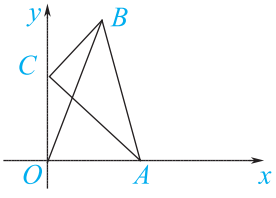
4．在直角坐标系中，有四个点 $A(-8,3),B(-4,5),C(0,n),D(m,0)$，当四边形 $ABCD$ 的周长最短时，求 $\frac{n}{m}$.

5. 如下图所示, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 满足：$\angle C=90°$, $AC=2$, $BC=1$, 点 A、C 分别在 x 轴、y 轴上，当点 A 从原点开始在 x 轴的正半轴上运动时，点 C 随着在 y 轴上运动.

（1）当点 A 在原点时，求原点 O 到点 B 的距离 OB；

（2）当 $OA=OC$ 时，求原点 O 到点 B 的距离 OB；

（3）求原点 O 到点 B 的距离 OB 的最大值，并确定此时图形应满足什么条件？



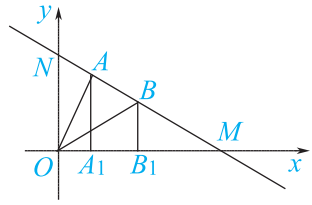
6．如下图所示，函数 $y=mx-4m$ 的图像分别交 x 轴、y 轴于点 N、M，线段 MN 上两点 A、B 在 x 轴上的垂足分别为 A_1、B_1，若 $OA_1+OB_1>4$，则 $\triangle OA_1A$ 的面积 S_1 与 $\triangle OB_1B$ 的面积 S_2 的大小关系是（　　）

A. $S_1 > S_2$

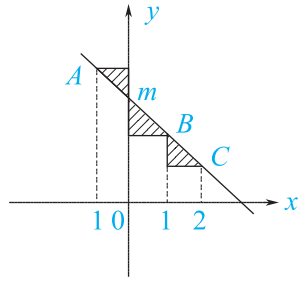
B. $S_1 = S_2$

C. $S_1 < S_2$

D. 不确定



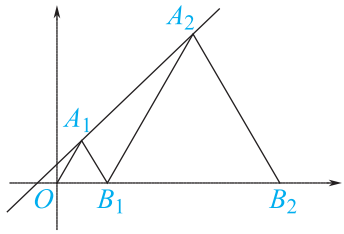
7. 如下图所示，点 A、B、C 在一次函数 $y=-2x+m$ 的图像上，它们的横坐标依次为 -1、1、2，分别过这些点作 x 轴与 y 轴的垂线，则图中阴影部分的面积之和是多少？



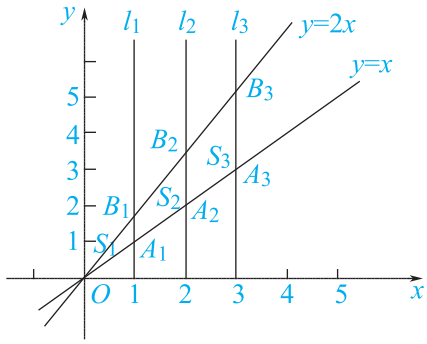
8. 对于正整数 k，记直线 $y=-\frac{k}{k+1}x+\frac{k}{k+1}$ 与坐标轴所围成的直角三角形面积为 S_k，求 $S_1+S_2+\cdots+S_{2015}$.

9．设直线 $y=kx+k-1$ 和直线 $y=(k+1)x+k$ （k 是正整数）与 x 轴围成的三角形面积为 S_k，求 $S_1+S_2+\cdots+S_{2015}$．

10. 平面直角坐标系中点 O 为原点，作正△OA_1B_1 使得 A_1 在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}$ 上，B_1 在 x 轴正半轴上；继续在△OA_1B_1 右边作正△$B_1A_2B_2$，使得 A_2 在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}$ 上，B_2 在 x 轴正半轴上；如此继续下去，则 B_5 的横坐标为_____.

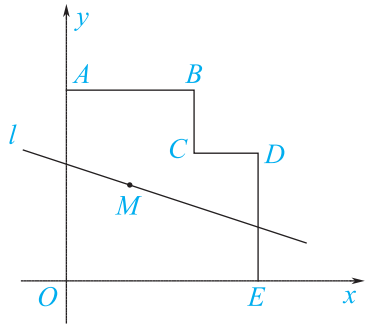


11．如下图所示，直线 $l_1\perp x$ 轴于点（1，0），直线 $l_2\perp x$ 轴于点（2，0），直线 $l_3\perp x$ 轴于点（3，0），…，直线 $l_n\perp x$ 轴于点（n，0）．函数 $y=x$ 的图像与直线 l_1，l_2，l_3，…，l_n 分别交于点 A_1，A_2，A_3，…，A_n；函数 $y=2x$ 的图像与直线 l_1，l_2，l_3，…，l_n 分别交于点 B_1，B_2，B_3，…，B_n；如果△OA_1B_1 的面积记作 S_1，四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 的面积记作 S_2，四边形 $A_2A_3B_3B_2$ 的面积记作 S_3，…，四边形 $A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}$ 的面积记作 S_n，那么 S_{2014}=_____.

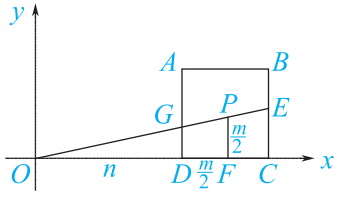


12. 一个三角形的三个顶点分别是(0,0)，(1,1)，(6m,0)．直线 $y=mx$ 把此三角形的面积二等分，所有满足条件的 m 的值之和是？

13. 如下图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，多边形 $OABCDE$ 的顶点坐标分别是 $O(0,0)$、$A(0,6)$、$B(4,6)$、$C(4,4)$、$D(6,4)$、$E(6,0)$．若直线 l 经过点 $M(2,3)$，且将多边形 $OABCDE$ 分割成面积相等的两部分，则直线 l 的函数表达式是_____.



14. 如下图所示，正方形 $ABCD$ 被直线 OE 分成面积相等的两部分．已知线段 OD，AD 的长都是正整数．$\dfrac{CE}{BE}=20$，则满足上述条件的正方形 $ABCD$ 面积的最小值是多少？



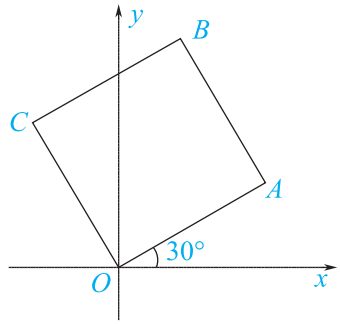
15．在直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图像与 x 轴、y 轴的正半轴分别交于 A、B 两点，且使得△OAB 的面积值等于 $|OA|+|OB|+3$．

（1）用 b 表示 k；

（2）求△OAB 的面积的最小值．

16．若直线 $y=\frac{4}{3}x+4$ 与 x 轴、y 轴的交点分别为 A、B．又 P、Q 两点的坐标分别为 $P(0,-1)$，$Q(0,k)$，$0<k<4$，再以 Q 点为圆心，PQ 长为半径作圆，则当 k 取何值时，⊙Q 与直线 AB 相切？

17．如下图所示，已知边长为 1 的正方形 $OABC$ 在直角坐标系中，A、B 两点在第一象限内，OA 与 x 轴的夹角 30 °，求点 B 的坐标．



18．直线 $y=x+2$ 向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位，所得到的直线的解析式是_____.

19．把函数 $y=2x$ 的图像向右平移 3 个单位，求：

（1）平移后得到的直线解析式；

（2）平移后的直线上到两坐标轴距离相等的点的坐标.

20．在平面直角坐标系中，直线 $l: y=-\frac{4}{3}x+4$ 分别交 x 轴、y 轴于点 A、B，将△AOB 绕点 O 顺时针旋转 90 °后得到△$A'OB'$.

（1）求直线 $A'B'$ 的解析式；

（2）若直线 $A'B'$ 与直线 l 相交于点 C，求 $S_{\triangle A'CB}$.

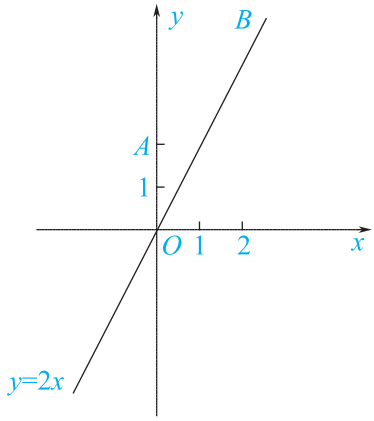
21．已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像过点(m,n)，其中 m,n 均为小于 6 的正整数．如果将该一次函数的图像先向右平移 m 个单位，再向上平移 n 个单位，得到

的直线恰好就是原函数 $y=kx+b$ 的图像，那么实数对(k,b)共有_____种不同的取值.

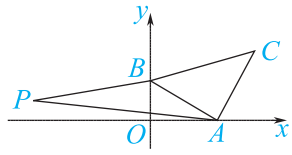
22. 在一次函数 $y=-x+3$ 的图像上取一点 P，作 $PA\perp x$ 轴于点 A，$PB\perp y$ 轴于点 B，且矩形 $OAPB$ 的面积为 $\frac{9}{4}$，求出所有满足要求的点 P 的坐标.

23. 在平面直角坐标系内，直线 $y=\frac{3}{4}x+3$ 与两坐标轴交于 A、B 两点，点 O 为坐标原点，若在该坐标平面内有以点 P（不与点 A、B、O 重合）为顶点的直角三角形与 Rt△ABO 全等，且这个以点 P 为顶点的直角三角形与 Rt△ABO 有一条公共边，则所有符合条件的 P 点个数是多少？

24. 如下图所示，直线 OB 是一次函数 $y=2x$ 的图像，点 A 的坐标为(0,2)，在直线 OB 上找点 C，使得△ACO 为等腰三角形，求点 C 的坐标.

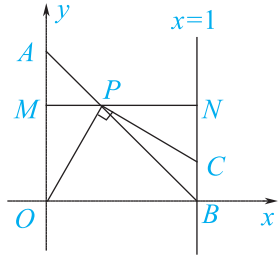


25. 函数 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 的图像与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点，C 点在第一象限内，且△ABC 是等腰直角三角形，$\angle BAC=90°$，有一点 $P(a,\frac{1}{2})$ 使△ABP 和△ABC 的面积相等，求 a 的值.



26. 如下图所示，以 O 为原点的直角坐标系中，A 点的坐标为(0,1)，直线 $x=1$ 交 x 轴于点 B，P 为线段 AB 上一动点，作直线 $PC\perp PO$，交直线 $x=1$ 于点 C，过 P 点作直线 MN 平行于 x 轴，交 y 轴于点 M，交直线 $x=1$ 于点 N.

（1）当点 C 在第一象限时，求证：△OPM≌△PCN；



（2）当点 C 在第一象限时，设 AP 长为 m，四边形 $POBC$ 的面积为 S，请求出 S 与 m 间的函数关系式，并写出自变量 m 的取值范围；

（3）当点 P 在线段 AB 上移动时，点 C 也随之在直线 $x=1$ 上移动，$\triangle PBC$ 是否可能成为等腰三角形？如果可能，求出所有能使$\triangle PBC$ 成为等腰三角形的点 P 的坐标；如果不可能，请说明理由.

27．已知长方形 $ABCO$，O 为坐标原点，B 点坐标为(8,6)，A、C 分别在坐标轴上，P 是线段 BC 上的动点，设 $PC=m$，已知点 D 在第一象限且是直线 $y=2x+6$ 上的一点，若$\triangle APD$ 是等腰直角三角形.

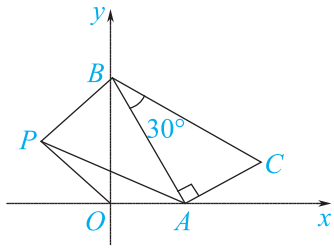
（1）求点 D 的坐标；

（2）直线 $y=2x+6$ 向右平移 6 个单位后，在该直线上是否存在点 D，使$\triangle APD$ 是等腰直角三角形？

若存在，请求出这些点的坐标；若不存在，请说明理由.

28. 如下图所示，一次函数 $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 的函数图像与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B，以线段 AB 为直角边在第一象限内作 Rt$\triangle ABC$，且使$\angle ABC$=30 °.

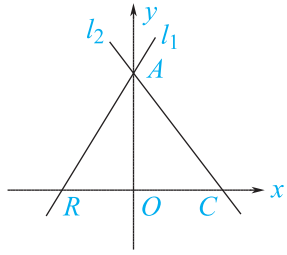
（1）若在第二象限内有一点 $P(m,\frac{\sqrt{3}}{2})$，求当$\triangle APB$ 与$\triangle ABC$ 面积相等时 m 的值；



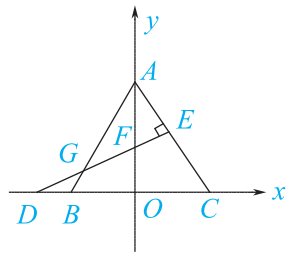
（2）是否存在使$\triangle QAB$ 是等腰三角形并且在坐标轴上的点 Q？若存在，请写出点 Q 所有可能的坐标；若不存在，请说明理由.

29. 如下图所示①，直线 $l:y=3x+3$ 与 x 轴交于 B 点，与直线 l_2 交于 y 轴上一点 A，且 l_2 与 x 轴的交点为 $C(1,0)$.

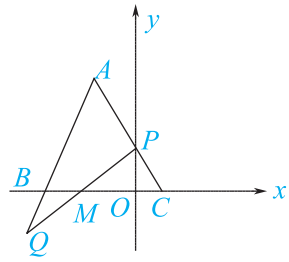
（1）求证：$\angle ABC=\angle ACB$.



（2）如下图所示，过 x 轴上一点 $D(-3,0)$作 $DE\perp AC$ 于 E，DE 交 y 轴于 F 点，交 AB 于 G 点，求 G 点的坐标.

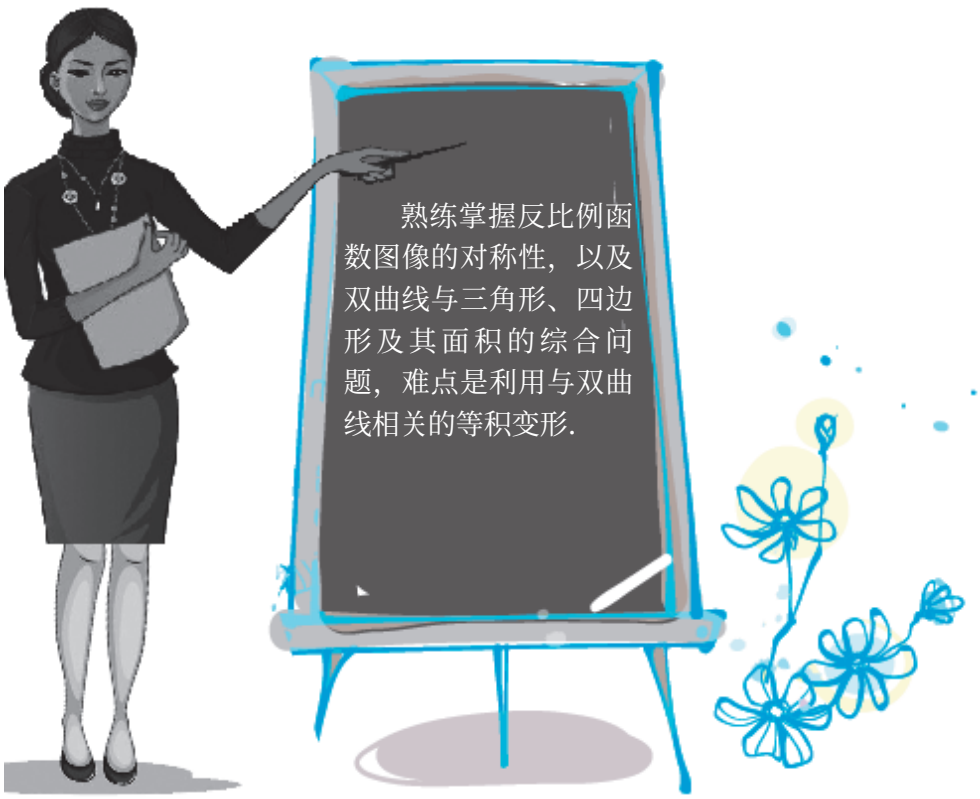


（3）如下图所示，将△ABC 沿 x 轴向左平移，AC 边与 y 轴交于一点 P（P 不同于 A、C 两点），过 P 点作一直线与 AB 的延长线交于 Q 点，与 x 轴交于 M 点，且 $CP=BQ$，在△ABC 平移的过程中，线段 OM 的长度是否发生变化？若不变，求其长度；若变化，确定其变化范围.



第2讲

反比例函数



熟练掌握反比例函数图像的对称性，以及双曲线与三角形、四边形及其面积的综合问题，难点是利用与双曲线相关的等积变形.

内容概要

1．掌握反比例函数的解析式与图像的关系，特别是 $y=\frac{k}{x}$ 中 k 的几何意义，以及与之相关的几何定值问题；

2．熟练掌握反比例函数图像的对称性，以及双曲线与三角形、四边形及其面积的综合问题，难点是利用与双曲线相关的等积变形．

例题与习题

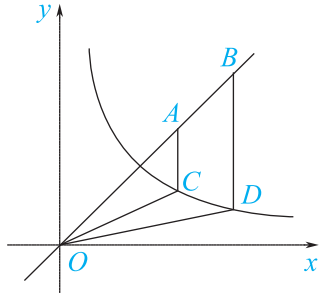
一、反比例函数的解析式（点在双曲线上必须满足解析式；待定系数法求出参数，从而求出解析式）

1．（1）直线 $y=kx(k>0)$ 与双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点，则 $2x_1y_2-7x_2y_1$ 的值等于_____．

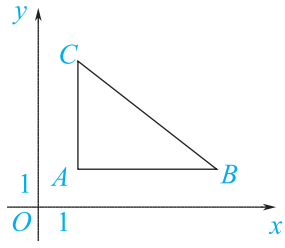
（2）直线 $y=ax(a>0)$ 与双曲线 $y=\frac{3}{x}$ 交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点，则 $4x_1y_2-3x_2y_1=$_____．

（3）如果一个正比例函数的图像与一个反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像交于点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，那么 $(x_2-x_1)(y_2-y_1)$ 值为_____．

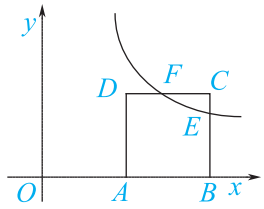
2．如下图所示，点 A，B 为直线 $y=x$ 上的两点，过 A，B 两点分别作 y 轴的平行线交双曲线 $y=\frac{1}{x}$（$x>0$）于 C、D 两点．若 $BD=2AC$，则 $4OC^2-OD^2$ 的值为_____．



3．如下图所示，Rt△ABC 位于第一象限内，A 点的坐标为(1,1)，两条直角边 AB、AC 分别平行于 x 轴、y 轴，$AB=4$，$AC=3$，若反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图像与 Rt△ABC 有交点，求 k 的最大值和最小值.



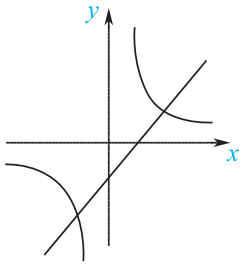
4．如下图所示，正方形 $ABCD$ 的边 AB 在 x 轴的正半轴上，C 点坐标为(2,1)，D 点坐标为(1,1). 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像与边 BC 交于点 E，与边 CD 交于点 F. 已知 BE∶CE=3∶1，则 DF∶FC.



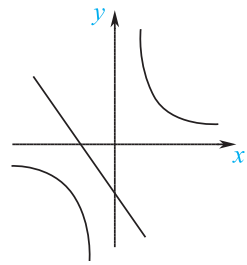
5．点 $A(4,0)$，$B(0,3)$与点 C 构成边长分别为 3，4，5 的直角三角形，如果点 C 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上，求 k 可能取的一切值.

二、反比例函数的图像与性质（包括对称性、增减性、所在象限等）

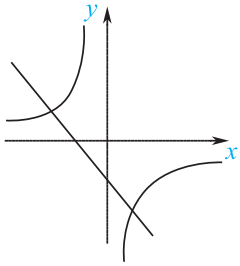
1. 函数 $y=\frac{a}{x}$ $(a\neq0)$ 与 $y=a(x-1)$ $(a\neq0)$ 在同一坐标系中的大致图像是（　　）.



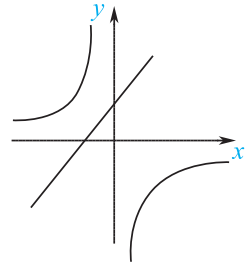
A.



B.



C.



D.

2. 在同一直线坐标系中，若正比例函数 $y=k_1x$ 的图像与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图像没有公共点，则（　　）.

A. $k_1+k_2<0$　　B. $k_1+k_2>0$

C. $k_1k_2<0$　　D. $k_1k_2>0$

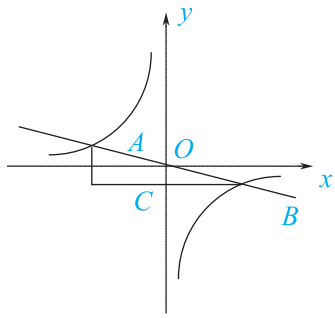
3. 点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$都在反比例函数 $y=\frac{-3}{x}$ 的图像上，若 $x_1<x_2<0<x_3$，则 y_1、y_2、y_3 的大小关系是（　　）.

A. $y_3<y_1<y_2$　　B. $y_1<y_2<y_3$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_1<y_3$

4．如果正比例函数 $y=ax$（$a\neq 0$）与反比例函数 $y=\dfrac{b}{x}$（$b\neq 0$）的图像有两个交点，其中一个交点的坐标为(-3,-2)，请写出另一个交点的坐标.

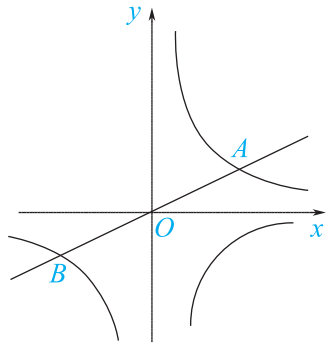
5．如下图所示，反比例函数 $y=-\dfrac{4}{x}$ 的图像与直线 $y=-\dfrac{1}{3}x$ 的交点为 A，B，过点 A 作 y 轴的平行线与过点 B 作 x 轴的平行线相交于点 C，求△ABC 的面积.



【提示】利用双曲线关于原点对称的性质以及由反比例函数的参数 k 值决定的某些三角形面积的相等性.

6．如下图所示，已知直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(k>0)$ 交于 A、B 两点，且 A 点的横坐标为 4.

（1）若双曲线上一点 C 的纵坐标为 8，求△AOC 的面积；



（2）过原点 O 的另一条直线 l 交该双曲线于 P、Q 两点（P 在第一象限），若由点 A、B、P、Q 为顶点组成的四边形的面积为 24，求 P 点坐标.

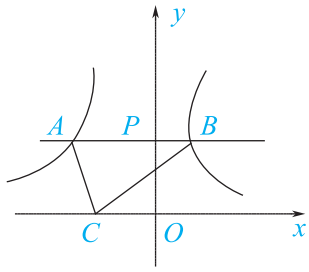
7. 若直线 l：$y=x+3$ 交 x 轴于点 A，交 y 轴于点 B. 坐标原点 O 关于直线 l 的对称点 O' 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上.

（1）求反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的解析式；

（2）将直线 l 绕点 A 逆时针旋转角 $\theta(0°<\theta<45°)$，得到直线 l'，l' 交 y 轴于点 P，过点 P 作 x 轴的并行线，与上述反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像交于点 Q，当四边形 $APQO'$ 的面积为 $9-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 时，求 θ 的值.

三、双曲线与几何（由反比例函数参数的不变性决定的各种等积变形及几何定值问题，利用相似解决某些双曲线的问题，反比例函数与一次函数的综合问题等）

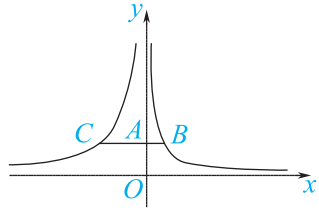
1. 如下图所示，过 y 轴正半轴上的任意一点 P，作 x 轴的平行线，分别与反比例函数 $y=-\frac{4}{x}$ 和 $y=\frac{2}{x}$ 的图像交于点 A 和点 B，若点 C 是 x 轴上任意一点，连接 AC、BC，则△ABC 的面积为_____.



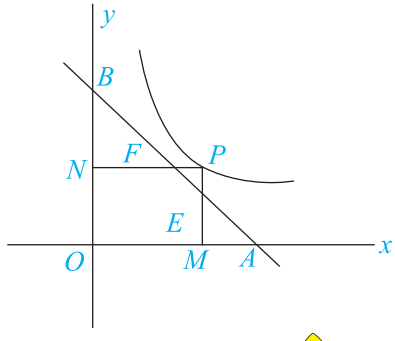
【提示】利用平行线相关的等积变形，将所求面积与双曲线的参数 k 值上靠拢.

2. 如下图所示，已知函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$，$y=\frac{k}{x}(x<0)$，点 A 在正 y 轴上，过点 A 作 $BC\parallel x$ 轴，交两个函数的图像于点 B 和点 C，若 $AB:AC=1:3$，则 k 的值是多少.

【提示】两个矩形的宽一定，长的比就是面积比.



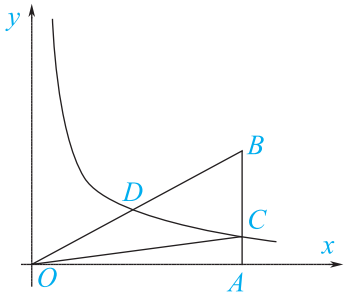
3. 如下图所示，P 是函数 $y=\frac{1}{2x}(x>0)$ 图像上一点，直线 $y=-x+1$ 交 x 轴于点 A，交 y 轴于点 B，$PM\perp Ox$ 轴于 M，交 AB 于 E，$PN\perp Oy$ 轴于 N，交 AB 于 F，则 $AF\cdot BE$ 的值为_____.



【提示】寻求 $AF\cdot BE$ 的值与 $PM\cdot PN$ 的关系，从而与参数 k 值靠拢.

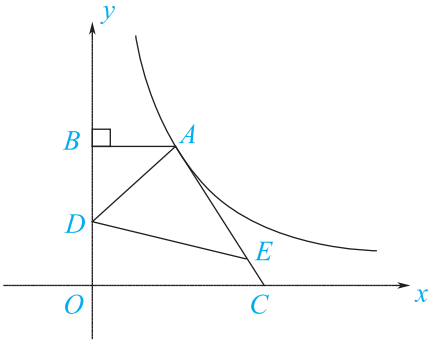
4．如下图所示，已知双曲线 $y=\frac{k}{x}(k>0)$经过直角三角形 OAB 斜边 OB 的中点 D，与直角边 AB 相交于点 C．若△OBC 的面积为 3，则 $k=$_____.

【提示】中点 D 的运用是关键．你能联想到哪些等积变形的技巧？



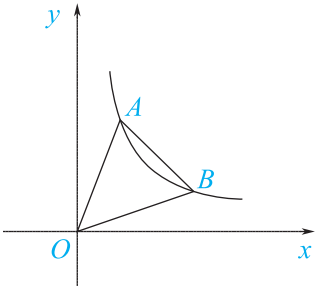
5．如下图所示，点 A 在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 的第一象限的那一支上，AB 垂直于 y 轴与点 B，点 C 在 x 轴正半轴上，且 $OC=2AB$，点 E 在线段 AC 上，且 $AE=3EC$，点 D 为 OB 的中点，若△ADE 的面积为 3，则 k 的值为_____.

【提示】给出了梯形 $ABOC$ 的腰 BO 的中点 D，于是联想到梯形中的“一半模型”.

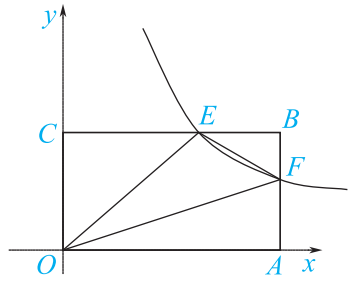


6．如下图所示，直线 $y=6x$，$y=\frac{2}{3}x$ 分别与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 在第一象限内交于点 A，B，若 $S_{\triangle AOB}=8$，则 $k=$_____.

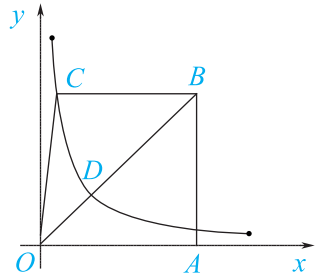
【提示】这是一个基本问题，通过等积变形，将△AOB 的面积转化为一个直角梯形的面积，从而与点 A、B 的坐标建立联系．后面几道题都要用到这一思路.



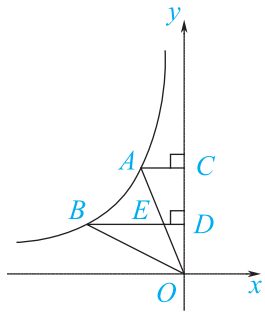
7. 如下图所示，双曲线 $y=\frac{2}{x}(x>0)$ 与矩形 $OABC$ 的边 CB、BA 分别交于点 E、F，且 $AF=BF$，连接 EF，求△OEF 的面积.



8. 如下图所示，已知梯形 $ABCO$ 的底边 AO 在 x 轴上，$BC//AO$，AB 垂直 AO，过点 C 的双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 交 OB 于 D 点，且 $\frac{OD}{DB}=\frac{1}{2}$. 若三角形 OBC 的面积等于 3，求 k 的值.

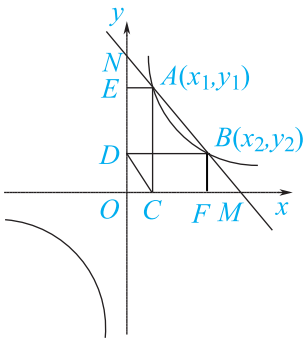


9. 如下图所示，设点 A、B 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 图像上的两点，AC、BD 都垂直于 y 轴，垂足分别是点 C、D，连接 OA、OB，若 OA 交 BD 于 E，且△OBE 的面积是 2011，求梯形 $AEDC$ 的面积.



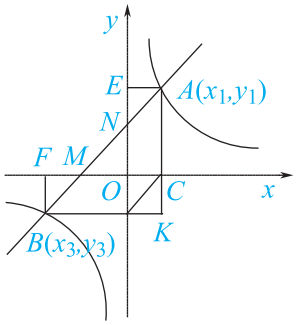
10. 一次函数$y=ax+b$的图像分别与x轴、y轴交于点M、N，与反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图像相交于点A、B. 过点A分别作$AC\perp x$轴，$AE\perp y$轴，垂足分别为点C、E；过点A分别作$BF\perp x$轴，$BD\perp y$轴，垂足分别为F、D，AC与BD交于点K，连接CD.

（1）若点A、B在反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图像的同一分支上，如下图所示，试探究AN与BM的数量关系.



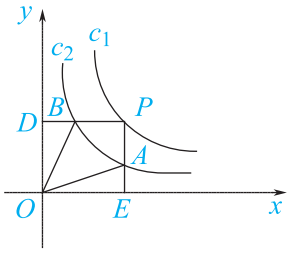
（2）若点A、B分别在反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图像的不同分支上，如下图所示，则AN与BM是否还具有上述的关系？试证明你的结论.

【提示】巧用平行线相关的等积变形是解决问题的关键. 下面两道题可用到本题的结论.

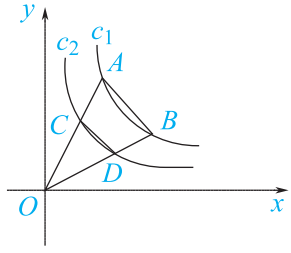


11．证明题

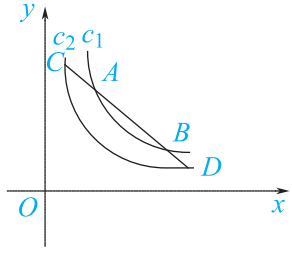
（1）如下图所示，若点 P 在 c_1 上，$PE\perp x$ 轴于点 E，交 c_2 于点 A，$PD\perp y$ 轴于点 D，交 c_2 于点 B，则 $S_{四边形PAOB}=k_1-k_2$．



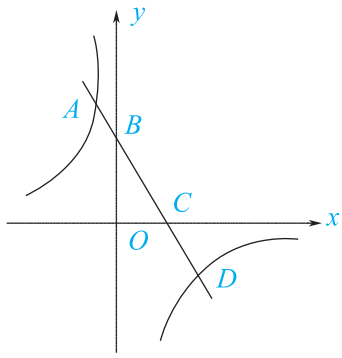
（2）如下图所示，若过 O 点作两直线分别交 c_1、c_2 于 A、B 两点和 C、D 两点，则 $\dfrac{OC}{OA}=\dfrac{OD}{OB}$，$AB/\!/CD$.



（3）如下图所示，若一条直线与 c_1、c_2 分别交于 A、B 两点和 C、D 两点，则 $AC=BD$.

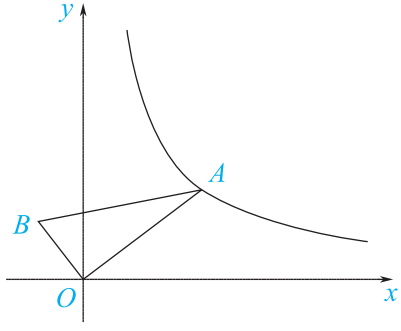


12. 如右图所示，已知函数 $y=-x+1$ 的图像与 x 轴、y 轴分别交于点 C、B，与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 交于点 A、D，若 $AB+CD=BC$，则 k 的值为_____.



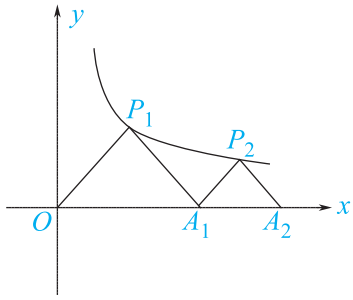
13. 如下图所示，Rt△OAB 的顶点 O 与坐标原点重合，$\angle AOB=90°$，$AO=2BO$，当 A 点在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$（$x>0$）的图像上移动时，请写出 B 点坐标满足的函数解析式.

【提示】看到比例关系，构造相似不失为一种好的方法.

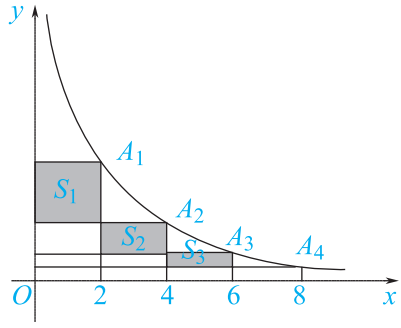


14. 已知点 O 为坐标原点，位于第一象限的点 A 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 的图像上，位于第二象限的点 B 在反比例函数 $y=-\frac{4}{x}(x<0)$ 的图像上，且 $OA\perp OB$，求 $\tan\angle ABO$.

15. 如下图所示，$\triangle P_1OA_1$、$\triangle P_2A_1A_2$ 都是等腰直角三角形，点 P_1、P_2 在函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$ 的图像上，斜边 OA_1、A_1A_2 都在 x 轴上，则点 A_2 的坐标是_____.

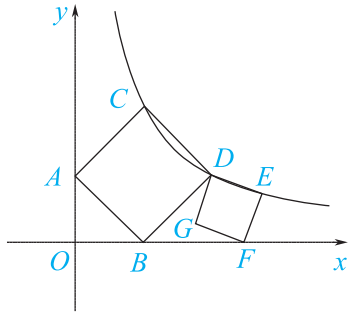


16. 在反比例函数 $y=\frac{10}{x}(x>0)$ 的图像上，有一系列点 A_1、A_2、A_3、…、A_n、A_{n+1}，若 A_1 的横坐标为 2，且以后每点的横坐标与它前一个点的横坐标的差都为 2，现分别过点 A_1、A_2、A_3、…、A_n、A_{n+1} 作 x 轴与 y 轴的垂线段，构成若干个矩形，如下图所示，将图中阴影部分的面积从左到右依次记为 S_1、S_2、S_3、…、S_n，则 S_1=_____，$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n$=_____（用含 n 的代数式表示）.



17. 如下图所示，点 C、D、E 在反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 图像位于第一象限的一支上，四边形 $ABDC$ 与 $DGFE$ 都是正方形，点 A 在 y 轴上，点 B、F 在 x 轴上，求 E 点坐标.

【提示】可以考虑弦图.



第3讲

二次函数（一）——解析式、图像、性质





内容概要

1．二次函数的解析式（一般式；截距式；顶点式）；

2．二次函数的图像——抛物线，及其对称轴、顶点坐标、增减性与解析式的关系；

3．二次函数的性质：结合图像去理解、运用．



例题与习题

1．对于二次函数 $y=x^2-2mx-3$，有下列说法：

① 它的图像与 x 轴有两个公共点；

② 如果当 $x\leq 1$ 时 y 随 x 的增大而减小，则 $m=1$；

③ 如果将它的图像向左平移 3 个单位后过原点，则 $m=-1$；

④ 如果当 $x=4$ 时的函数值与 $x=2008$ 时的函数值相等，则当 $x=2012$ 时的函数值为 -3．

其中正确的说法是_____（把你认为正确的说法的序号都填上）．

2．已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 中，函数 y 与自变量 x 之间的部分对应值如下表所示：

x	…	0	1	2	3	…
y	…	5	2	1	2	…

点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$在函数图像上，则当 $0<x_1<1$，$2<x_2<3$ 时，y_1 和 y_2 的大小关系正确的是（　　）．

A．$y_1\geq y_2$　　B．$y_1>y_2$　　C．$y_1<y_2$　　D．$y_1\leq y_2$

3．用列表法画二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图像时先列一个表，当表中对自变量 x 的值以相等间隔的值增加时，函数 y 所对应的值依次为：20，56，110，182，274，380，506，650，其中有一个值不正确，这个不正确的值是（　　）．

A．506　　B．380　　C．274　　D．182

4．某学生为了描点作出函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像，取自变量的 7 个值：$x_1<x_2\cdots<x_7$，且 $x_2-x_1=x_3-x_2=\cdots=x_7-x_6$，分别算出对应的 y 的值，列表如下：

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
y	51	107	185	285	407	549	717

但由于粗心算错了其中一个 y 值，请指出算错的是哪一个值？正确的值是多少？并说明理由．

5．二次函数 $y=-(x-2)^2+\dfrac{9}{4}$ 的图像与 x 轴围成的封闭区域内（包括边界），横、纵坐标都是整数的点有_____个．

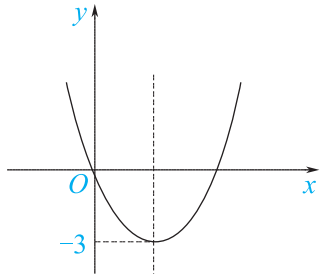
6．二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图像如下图所示，若一元二次方程 $ax^2+bx+m=0$ 有实数根，则 m 的最大值为（　　）．

A．-3

B．3

C．-6

D．9

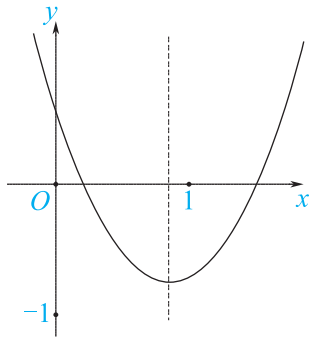


7. 二次函数 $y=ax^2+bx+1(a\neq 0)$ 的图像的顶点在第一象限，且过点$(-1,0)$，设 $t=a+b+1$，则 t 值的变化范围是（　　）.

A. $0<t<1$　　B. $0<t<2$

C. $1<t<2$　　D. $-1<t<1$

8. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像如下图所示，则下列 7 个代数式 ab，ac，bc，b^2-4ac，$a+b+c$，$a-b+c$，$2a+b$ 中，其值为正的式子的个数为（　　）.



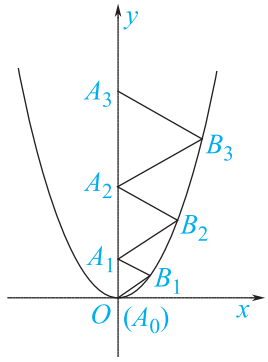
A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 4 个以上

9. 二次函数 $y=\frac{2}{3}x^2$ 的图像如下图所示，点 A_0 位于坐标原点，点 A_1，A_2，A_3，…，A_{2014} 在 y 轴的正半轴上，点 B_1，B_2，B_3，…，B_{2014} 在二次函数 $y=\frac{2}{3}x^2$ 位于第一象限的图像上．若$\triangle A_0B_1A_1$，$\triangle A_1B_2A_2$，$\triangle A_2B_3A_3$，…，$\triangle A_{2013}B_{2014}A_{2014}$ 都为等边三角形，则$\triangle A_{2013}B_{2014}A_{2014}$ 的边长=_____.



10. 如下图所示，已知点 $A(4,0)$，O 为坐标原点，P 是线段 OA 上任意一点（不含端点 O，A），过 P、O 两点的二次函数 y_1 和过 P、A 两点的二次函数 y_2 的图像开口均向下，它们的顶点分别为 B、C，射线 OB 与 AC 相交于 D，当 $OD=AD=3$

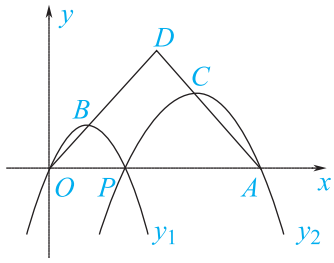
时，这两个二次函数的最大值之和等于（　　）.

A. $\sqrt{5}$

B. $\frac{4}{3}\sqrt{5}$

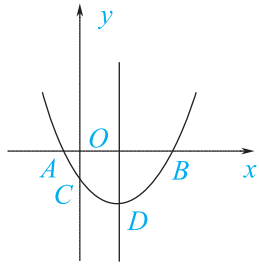
C. 3

D. 4



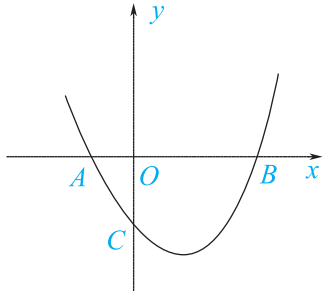
11. 已知 $A(1,0)$、$B(0,-1)$、$C(-1,2)$、$D(2,-1)$、$E(4,2)$五个点，抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 经过其中三个点. 求 a 与 k 的值.

12. 如下图所示，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx-2$ 与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于 C 点，D 为抛物线的顶点，且 $A(-1,0)$，点 $M(m,0)$ 是 x 轴上的一个动点，当 $MC+MD$ 的值最小时，m 的值为_____.



13. 如下图所示，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$、$B(3,0)$两点.

（1）求该抛物线的解析式；



（2）设（1）中的抛物线上有一个动点 P，当点 P 在该抛物线上滑动到什么位置时，满足 $S_{\triangle PAB}=8$？并求出此时 P 点的坐标；

（3）设（1）中的抛物线交 y 轴于 C 点，在该抛物线的对称轴上是否存在点 Q，使得△QAC 的周长最小？若存在，求出 Q 点的坐标，若不存在，请说明理由.

14．不论 m 取任何实数，抛物线 $y=x^2+2mx+m^2+m-1$ 的顶点都在一条直线上，则这条直线的函数解析式为_____.

15．无论 a 为何值，抛物线 $y=x^2+(a+1)x+\frac{a}{2}+\frac{1}{4}$ 恒过一定点，试确定这个定点的坐标.

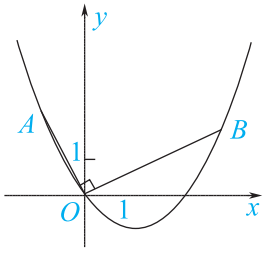
16．已知二次函数 $y=x^2+2(m+1)x-m+1$．

（1）随着 m 的变化，该二次函数图像的顶点 P 的轨迹是什么？

（2）如果直线 $y=x+1$ 经过二次函数 $y=x^2+2(m+1)x-m+1$ 图像的顶点 P，求此时 m 的值．

17．如下图所示，在平面直角坐标系中，$OB\perp OA$，且 $OB=2OA$，点 A 的坐标是$(-1,2)$．

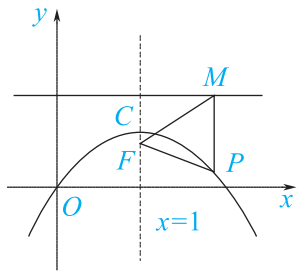
（1）求点 B 的坐标；



（2）求过点 A、O、B 的抛物线的解析式；

（3）连接 AB，在（2）中的抛物线上求出点 P，使得 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABO}$.

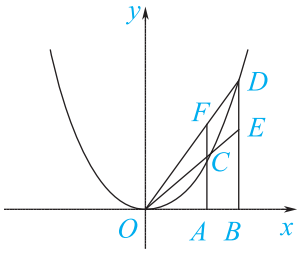
18．如下图所示，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 顶点为(1,1)，且过原点 O．过抛物线上一点 $P(x,y)$向直线 $y=\frac{5}{4}$ 作垂线，垂足为 M，连 FM.



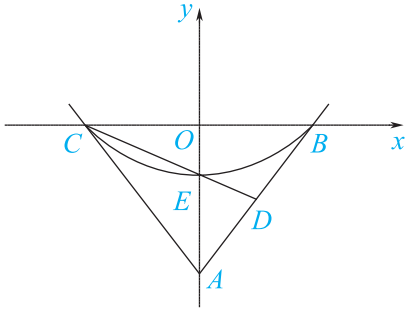
（1）在直线 x=1 上有一点 $F(1,\frac{3}{4})$，求以 PM 为底边的等腰△PFM 的 P 点的坐标，并证明此时△PFM 为正三角形；

（2）对抛物线上任意点 P，是否存在点 $N(1,t)$，使 PM=PN 恒成立？请说明理由.

19. 如下图所示，在 x 轴上有两点 $A(m,0)$，$B(n,0)$（$n>m>0$），分别过点 A、点 B 作 x 轴的垂线，交抛物线 $y=x^2$ 于点 C、点 D. 直线 OC 交直线 BD 于点 E，直线 OD 交直线 AC 于点 F，连接 EF，AE，当 $S_{四边形OFEB}=3S_{\triangle OFE}$ 时，直接写出 m 与 n 的关系及四边形 $OFEA$ 的形状.



20. 如下图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，$AO=8$，$AB=AC$，$\sin\angle ABC=\frac{4}{5}$. CD 与 y 轴交于点 E，且 $S_{\triangle COE}=S_{\triangle ADE}$. 已知经过 B、C、E 三点的图像是一条抛物线，求这条抛物线对应的二次函数的解析式.



21. 已知a,b,c都是实数，函数$f(x)=ax^2+bx+c, g(x)=ax+b$，当$-1\le x\le 1$时，$|f(x)|\le 1$.

（1）证明：$|c|\le 1$；

（2）证明：当$-1\le x\le 1$时，$|g(x)|\le 2$；

（3）设$a>0$，$-1\le x\le 1$时，$g(x)$的最大值为2，求$f(x)$的表达式.

第4讲

二次函数（二）——抛物线的几何变换





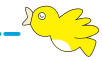
内容概要

抛物线的平移、对称、旋转变换，主要要抓住顶点坐标和开口方向的变化.



例题与习题

一、轴对称



1．抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ：

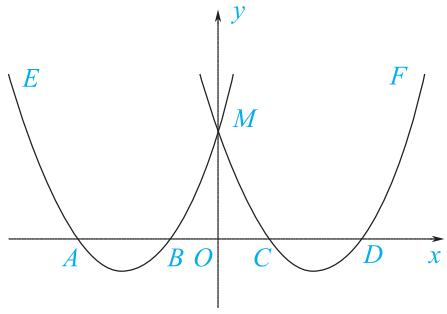
（1）将关于 x 轴和 y 轴的对称曲线的解析式分别求出来；

（2）该抛物线先关于 x 轴对称，再关于 y 轴对称的曲线解析式是什么？

（3）关于原点对称曲线的解析式是什么？

2．如下图所示，抛物线 E：$y=x^2+4x+3$ 交 x 轴于 A、B 两点，交 y 轴于 M 点，抛物线 E 关于 y 轴对称的抛物线 F 交 x 轴于 C、D 两点.

（1）求 F 的解析式；

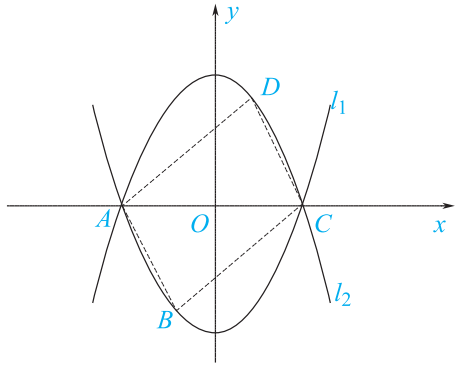


（2）在 x 轴上方的抛物线 F 或 E 上是否存在一点 N，使以 A、C、N、M 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，求点 N 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）若抛物线 E 的解析式改为 $y=ax^2+bx+c$，试探索问题（2）.

3．如下图所示，已知抛物线 $l_1: y=x^2-4$ 的图像与 x 轴交于 A、C 两点.

（1）若抛物线 l_2 与 l_1 关于 x 轴对称，求 l_2 的解析式；



（2）若点 B 是抛物线 l_1 上的一动点（B 不与 A、C 重合），以 AC 为对角线，A、B、C 三点为顶点的平行四边形的第四个顶点为 D，求证：D 点在 l_2 上；

（3）探索：当 B 分别位于 l_1 在 x 轴上、下两部分的图像上，（2）中的平行四边形 $ABCD$ 的面积是否存在最大值和最小值？若存在，判断它是何种特殊平行四边形，并求出它的面积；若不存在，请说明理由.

二、平移

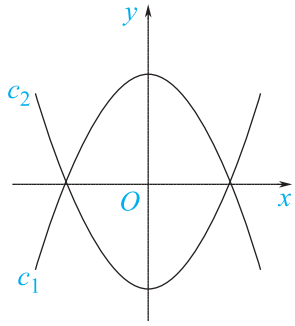
1．一抛物线向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位后得抛物线 $y=-2x^2+4x$，则平移前抛物线的解析式为_____.

2．（1）将抛物线 $y=2x^2$ 向右平移 p 个单位，或向下平移 q 个单位，都能使抛物线与直线 $y=x-4$ 恰有一个交点，求 p,q 的值；

（2）将抛物线 $y=2x^2$ 向左平移 p 个单位，向上平移 q 个单位，则得到的抛物线经过点(1,3)和(4,9)，求 p,q 的值.

3．将抛物线 $c_1: y_1=-\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}$ 沿 x 轴翻折，得抛物线 c_2，如下图所示．现将抛物线 c_1 向左平移 m 个单位长度，平移得到的新抛物线的顶点为 M，与 x 轴的交点从左到右依次为 A、B；将抛物线 c_2 向右也平移 m 个点位长度，平移后得到的新抛物线的顶点为 N，与 x 轴交点从左到右依次为 D、E.

（1）当 B、D 是线段 AE 的三等分点时，求 m 的值；



（2）在平移过程中，是否存在以点 A、N、E、M 为顶点的四边形是矩形的情形？若存在，请求出此时 m 的值；若不存在，请说明理由.

4．已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2+4x+k-1=0$ 有实数根，k 为正整数.

（1）当此方程有两个非零的整数根时，将关于 x 的二次函数 $y=2x^2+4x+k-1$ 的图像向下平移 8 个单位长度，求平移后的图像的解析式；

（2）在（1）的条件下，将平移后的二次函数的图像在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折，图像的其余部分保持不变，得到一个新的图像，当直线 $y=\frac{1}{2}x+b(b<k)$ 与

此图像有两个公共点时，求 b 的取值范围.

5．已知抛物线 $y=x^2-4x+1$，将此抛物线沿 x 轴方向向左平移 4 个单位长度，得到一条新的抛物线.

（1）若直线 $y=m$ 与这两条抛物线有且只有四个交点，求实数 m 的取值范围；

（2）若将已知的抛物线解析式改为 $y=ax^2+bx+c(a>0,\ b<0)$，并将此抛物线沿 x 轴方向向左平移 $-\dfrac{b}{a}$ 个单位长度，试探索问题（1）.

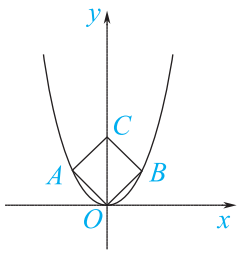
6．在直角坐标系中，点 A 是抛物线 $y=x^2$ 在第二象限上的点，连接 OA，过点 O 作 $OB\perp OA$，交抛物线于点 B，以 OA、OB 为边构造矩形 $AOBC$.

（1）如图①所示，当点 A 的横坐标为_____时，矩形 $AOBC$ 是正方形.

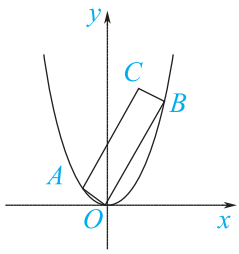
（2）如图②所示，当点 A 的横坐标为 $-\dfrac{1}{2}$ 时：

① 求点 B 的坐标；

② 抛物线 $y=x^2$ 经过轴对称、平移这两种变换后，能否经过 A，B，C 三点？如果可以，说出变换的过程，如果不可以，请说明理由.



图①



图②

7. 已知二次函数 $y=(t+1)x^2+2(t+2)x+\frac{3}{2}$ 在 x=0 和 x=2 时的函数值相等. 若一次函数 $y=kx+6$ 的图像与二次函数的图像都经过点 $A(-3,m)$，设二次函数的图像与 x 轴交于点 B、C（点 B 在点 C 的左侧），将二次函数的图像在点 B、C 间的部分（含点 B 和点 C）向左平移 n（$n>0$）个单位后得到的图像记为 G，同时将直线 $y=kx+6$ 向上平移 n 个单位. 当平移后的直线与图像 G 有公共点时，n 的取值范围是什么？

8．如下图所示，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 经过 $A(-3,0)$，$B(-1,0)$ 两点．

（1）求抛物线的解析式；

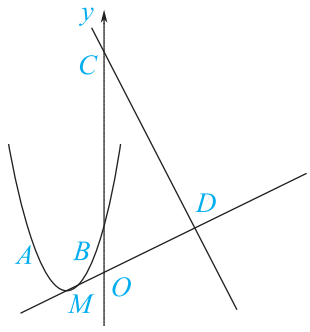


图1

（2）设抛物线的顶点为 M，直线 $y=-2x+9$ 与 y 轴交于点 C，与直线 OM 交于点 D．现将抛物线平移，保持顶点在直线 OD 上，若平移的抛物线与射线 CD（含端为 C）只有一个公共点，求它的顶点横坐标的值或取值范围；

（3）如下图所示，将抛物线平移，当顶点至原点时，过 $Q(0,3)$作不平行于 x 轴的直线交抛物线于 E，F 两点．问在 y 轴的负半轴上是否存在点 P，使△PEF 的内心在 y 轴上．若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

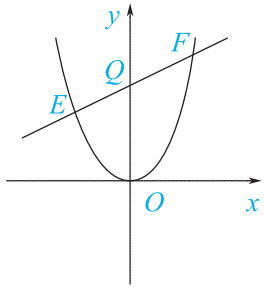
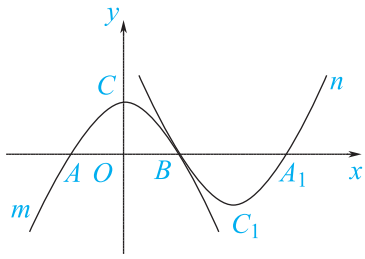


图2

三、旋转与中心对称

1．如下图所示，抛物线 $m: y=ax^2+b(a<0,\ b>0)$ 与 x 轴交于点 A，B（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C．将抛物线 m 绕点 B 旋转 180 °，得到新的抛物线 n，它的顶点为 C_1，与 x 轴的另一个交点为 A_1．

（1）当 $a=-1$，$b=1$ 时，求抛物线 n 的解析式；



（2）求证：四边形 AC_1A_1C 是平行四边形；

（3）四边形 AC_1A_1C 可能是矩形吗？若能，请求出 a，b 应满足的关系式，若不能，请说明理由．

2．已知二次函数 $y=ax^2+4ax+4a-1$ 的图像是 c_1．

（1）求 c_1 关于 R（1，0）成中心对称的图像 c_2 的函数解析式；

（2）设曲线 c_1、c_2 与 y 轴的交点分别为 A，B，当 AB=18 时，求 a 的值.

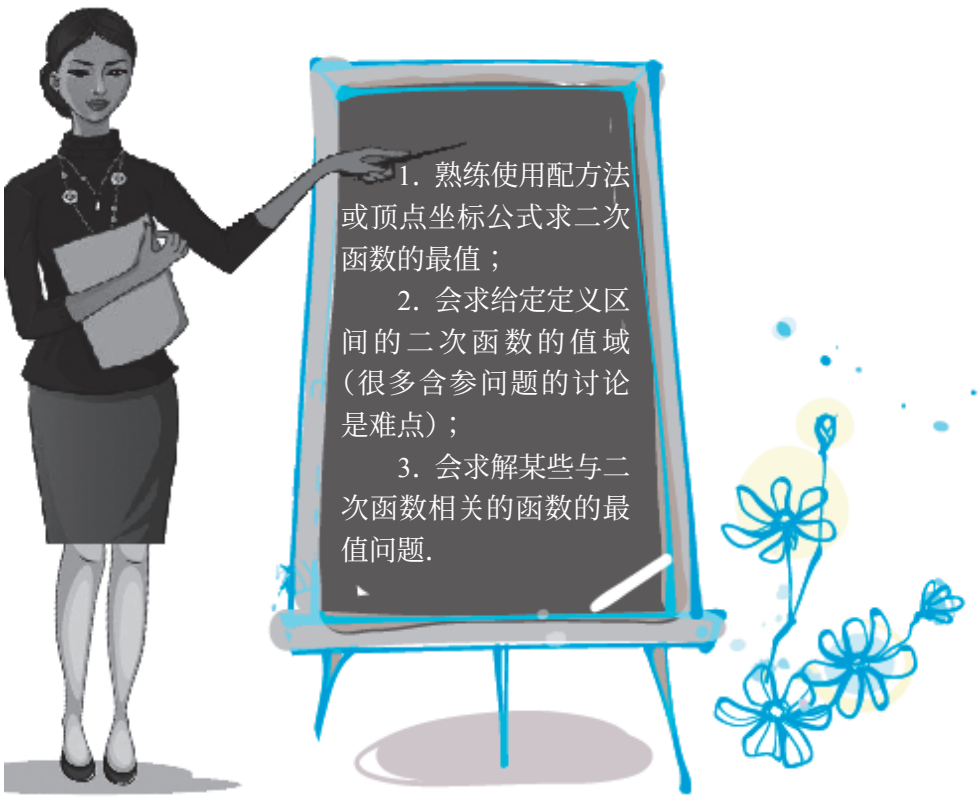
3. 抛物线 $C_1: y=ax^2-2amx+am^2+2m+1(a>0,m>0)$ 的顶点为 A，抛物线 C_2 的顶点 B 在 y 轴上，且 C_1 和 C_2 关于 $P(1,3)$ 成中心对称.

（1）当 $a=1$ 时，求 C_2 的解析式及 m 的值；

（2）设 C_2 与 x 轴正半轴的交点是 C，当△ABC 为等腰三角形时，求 a 的值.

第5讲

二次函数（三）——最值问题





内容概要

1．熟练使用配方法或顶点坐标公式求二次函数的最值；

2．会求给定定义区间的二次函数的值域（很多含参问题的讨论是难点）；

3．会求解某些与二次函数相关的函数的最值问题．



例题与习题

1．（1）求函数 $y=-2x^2+3x-1$ 的最值；

（2）当 $\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$ 时，求函数 $y=-2x^2+3x-1$ 的最值．

2．已知实数 a、b、c 满足 $2a+b-5c=5$，$2a-b-3c=-1$，则 $a^2+b^2+2c^2$ 的最小值等于多少？

3．$y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+5$，其中 $-3\le x\le 3$，求 y 的最小值．

4．已知 t 是实数，若 a，b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+t-1=0$ 的两个非负实根，求 $(a^2-1)(b^2-1)$ 的最小值.

5．已知实数 a，b 满足 $a^2+b^2=1$，则 a^4+ab+b^4 的最小值为？

6．设实数 a，b 满足：$3a^2-10ab+8b^2+5a-10b=0$，求 $u=9a^2+72b+2$ 的最小值.

【提示】可对条件中的等式进行因式分解.

7．已知方程组 $\begin{cases}x+3y=2n-1\\2x-y=m+1\end{cases}$ 的解 x，y 满足条件：$-1\leq x\leq 1$，$1\leq x\leq 2$，求 m^2+n^2 的取值范围.

8．实数 a，b 使得关于 x，y 的方程组 $\begin{cases} xy-x^2=1 \\ xy^2+ax^2+bx+a=0 \end{cases}$ 有实数解.

（1）求证：$|y|\geq 2$；

（2）求 a^2+b^2 的最小值.

9．函数 $y=(a+2)x^2-2(a^2-1)x+1$，其中自变量 x 为正整数，a 也是正整数，问：当 x 为何值时，函数值最小？

10．函数 $f(x)=4x^2-4ax+a^2-2a+2$ 在 $0\leq x\leq 2$ 上取最小值 2，求 a 的值.

【提示】定义区间不变，对称轴位置随 a 变化，可就对称轴位置与给定区间的关系分类讨论.

11．函数 $f(x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{13}{2}$ 在 $a\le x\le b$ 的范围内最小值为 $2a$，最大值为 $2b$，求实数对 (a,b).

【提示】对称轴位置不变，定义区间在变，可类似上道题讨论.

12．a，b 都是有理数，对于函数 $f(x)=x^2+2x-1$，定义域为 $[a,b]$，$a<b$)，值域为 $[-b,23]$，求 b 的值.

13．设 $ab\neq 0$，函数 $f(x)=x^2+2ax+4b$ 与 $f(x)=x^2+4ax+2b$ 有相同的最小值 u，函数 $f_3(x)=-x^2+2bx+4a$ 与 $f_4(x)=-x^2+4bx+2a$ 有相同的最大值 v，求 $u+v$.

14．当 $a^2+b^2+c^2+d^2+(1-a)^2+(a-b)^2+(c-d)^2+(d-1)^2$ 的值最小时，$a+b+c+d=$？

【提示】有 4 个自变量，“胡子眉毛一把抓”难以解决问题，不妨分主次考虑，采用“主元法”.

15．若 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-\frac{1}{2}}$ 的最大值为 a，最小值为 b，则 a^2+b^2 的值为_____.

16．求函数 $y=x+1-\sqrt{2x-1}$ 的值域.

【提示】可采用换元：设 $t=\sqrt{2x-1}$

17．关于 x 的函数 $f(x)$ 满足 $f(\sqrt{3x-1})=5x+1$，求 $f(x)$ 的值域.

18．求 $y=\frac{3x^2+3x+4}{x^2+x+1}$ 的最大值.

19．已知 a、b、c 都是正整数，关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两实根的绝对值均小于 $\frac{1}{3}$，求 $a+b+c$ 的最小值.

20．考察一切可能的二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c, a<b$，且对一切 x 都有 $f(x)\geq 0$．试问：表达式 $\dfrac{a+b+c}{b-a}$ 的最小值是什么？

第6讲

二次函数（四）——与二次方程或不等式的综合问题



内容概要

1. 结合二次函数的图像，认识一元二次方程的根以及一元二次不等式的解集的几何意义；
2. 灵活运用判别式定理和韦达定理解决抛物线与 x 轴的交点问题及相关问题（例如弦长问题等）；
3. 抛物线与直线的位置关系问题（无公共点、相切、有一个交点但不是相切、有两个交点等情况，常常需要把二次函数与一次函数的解析式联立）；
4. 结合二次函数的图像，求解一元二次方程根的分布问题；
5. 某些利用二次函数的图像来解决的恒成立问题.

例题

一、二次函数与一元二次方程的根或一元二次不等式的解集（含抛物线与直线的位置关系）

1. 设 x_1、x_2（$x_1<x_2$）是方程 $(x-a)(x-b)=m(a<b)$ 的两个根：

（1）若 $m>0$，则实数 x_1、x_2、a、b 的大小关系是（　　）.

A. $x_1<x_2<a<b$　　B. $x_1<a<x_2<b$

C. $x_1<a<b<x_2$　　D. $a<x_1<b<x_2$

（2）二次函数 $y=(x-x_1)(x-x_2)+m$ 的图像与 x 轴有几个交点？其坐标是什么？

2．已知：y 关于 x 的函数 $y=(k-1)x^2-2kx+k+2$ 的图像与 x 轴有交点.

（1）求 k 的取值范围.

（2）若 x_1、x_2 是函数图像与 x 轴两个交点的横坐标，且满足 $(k-1)x_1^2+2kx_2+k+2=4x_1x_2$.

① 求 k 的值；

② 当 $k\le x\le k+2$ 时，求 y 的最大值与最小值.

3．已知抛物线 $y=x^2$ 与动直线 $y=(2t-1)x-c$ 有公共点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 且 $x_1^2+x_2^2=t^2+2t-3$.

（1）求实数 t 的取值范围；

（2）当 t 为何值时，c 取到最小值，并求出此最小值.

4．已知抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=(k+2)x-(2k-1)$.

（1）判断抛物线与直线的位置关系；

（2）设该抛物线与直线的两个不同的交点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，若 x_1、x_2 均为整数，求实数 k 的值.

5. 已知二次函数 $y=mx^2+nx+p$ 图像的顶点横坐标是 2，与 x 轴交于 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，$x_1<0<x_2$，与 y 轴交于点 C，O 为坐标原点，$\tan\angle CAO-\tan\angle CBO=1$.

（1）求 m、n 的值；

（2）当 $p>0$ 且二次函数图像与直线 $y=x+3$ 仅有一个交点时，求二次函数的最大值.

6．已知：在平面直角坐标系 xOy 中，过点 $P(0,2)$ 任作一条与抛物线 $y=ax^2$（$a>0$）交于两点的直线，设交点分别为 A、B，若 $\angle AOB=90°$.

（1）确定抛物线 $y=ax^2$（$a>0$）的解析式；

（2）当 $\triangle AOB$ 的面积为 $4\sqrt{2}$ 时，求直线 AB 的解析式.

7. 设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(-x+2)$，且它的图像与 y 轴交于点 $(0,1)$，在 x 轴上截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，求 $f(x)$ 的解析式.

8．已知二次函数 $y=x^2+bx-c$ 的图像经过两点 $P(1,a)$，$Q(2,10a)$.

（1）如果 a，b，c 都是整数，且 $c<b<8a$，求 a，b，c 的值.

（2）设二次函数 $y=x^2+bx-c$ 的图像与 x 轴的交点为 A、B，与 y 轴的交点为 C．如果关于 x 的方程 $x^2+bx-c=0$ 的两个根都是整数，求△ABC 的面积．

9．设 p 是大于 2 的质数，k 为正整数．若函数 $y=x^2+px+(k+1)p-4$ 的图像与 x 轴的两个交点的横坐标至少有一个为整数，求 k 的值．

10．若抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与连接两点 $M(0,1)$，$N(2,3)$ 的线段（包括 M，N）有两个相异的交点，求 a 的取值范围．

11．不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解是 $\alpha<x<\beta$（其中 $\alpha>0$），求不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解．

二、一元二次方程根的分布问题

1．已知关于 x 的方程 $2x^2-3x+m=0$ 的一根大于 -2 且小于 -1，另一根大于 2 且小于 3，求 m 的取值范围.

2．若关于 x 的方程 $x^2-px-q=0$（p，q 是正整数）的正根小于 3，则这样的方程有几个？

3．$mx^2-(m-1)x+m^2-m-2=0$ 的两根分别在 $0<x<1$ 和 $1<x<2$ 的范围内，求 m 的取值范围.

4. 当 a 为何值时，方程 $x^2+2ax+2a^2-1=0$ 至少有一个正根？

5. 关于 x 的方程 $4^x-3a\cdot 2^x+a^2+1=0$（a 是实数）恰有一个实根满足 $0<x<1$，求 a 的所有可能值.

6. 函数 $y=x^2+(2k-1)x+k^2$ 的图像与 x 轴的两个交点是否都在直线 $x=1$ 的右侧？若是，请说明理由；若不一定是，请求出两个交点都在直线 $x=1$ 的右侧时 k 的取值范围.

7. 已知不等式 $(m^2+4m-5)x^2-4(m-1)x+3>0$ 对一切实数 x 恒成立，求实数 m 的取值范围.

8．不等式$\frac{3x^2+kx+2k}{x^2+x+2}>2$对一切实数$x$恒成立，求$k$的取值范围.

9．不等式$x^2+|2x-6|\geq a$对于一切实数x都成立．求实数a的最大值.

10．已知二次函数$y=x^2+(m+3)x+m+2$，当$-1<x<3$时，恒有$y<0$；关于x的方程$x^2+(m+3)x+m+2=0$的两个实数根的倒数和小于$-\frac{9}{10}$．求m的取值范围.

11. 设 a,b 是整数，$f(x)=x^2+ax+b$. 证明：若对于所有整数 x，都有 $f(x)>0$，则对于所有实数 x，有 $f(x)\geq 0$.

12. 关于 x、y、z 的方程组 $\begin{cases}3x+2y+z=a\\xy+2yz+3zx=6\end{cases}$，有实数解 (x,y,z)，求正实数 a 的最小值.

13. 已知 $a^2+b^2=1$，对于满足条件 $0\leq x\leq 1$ 的一切实数 x，不等式 $a(1-x)(1-x-ax)-bx(b-x-bx)\geq 0$ 恒成立. 当乘积 ab 取最小值时，求 a，b 的值.

第7讲

二次函数（五）——与几何的综合问题



内容概要

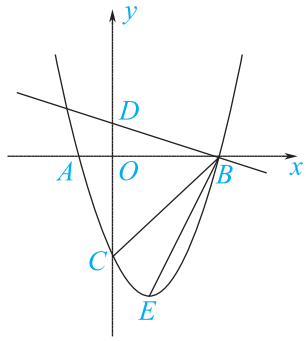
函数与几何综合，通常是几何问题放在函数背景下来考察的一类题目，解决这类问题要处理好以下三者的关系：函数、坐标、几何，其中坐标是纽带，利用好横平竖直的线，斜转直是常用的思路。

解决此类问题：

1. 通常先研究点的坐标，发现有无特殊角，比如 30°，45°，60°等，有无特殊的图形结构，比如直角三角形，等边三角形等，为后续问题的研究做铺垫；
2. 研究几何图形，发现几何特征，比如全等、相似、三角函数，或者经典的几何模型等；
3. 利用几何特征或者函数建等式进行求解.

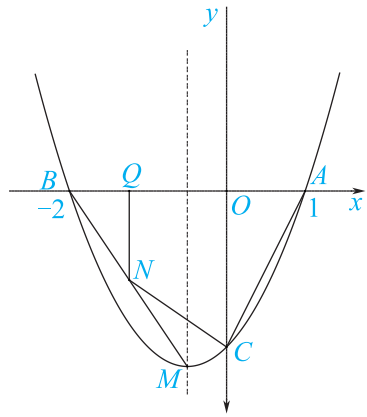
例题与习题

1. 如下图所示，抛物线 $y=ax^2+bx-3$，顶点为 E，该抛物线与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于点 C，且 $OB=OC=3OA$. 直线 $y=-\frac{1}{3}x+1$ 与 y 轴交于点 D. 求 $\angle DBC-\angle CBE$.



2. 如下图所示，已知二次函数 $y=ax^2+bx-2$ 的图像经过点 $A(1,0)$ 及 $B(-2,0)$ 两点.

（1）求二次函数的表达式及抛物线顶点 M 的坐标；

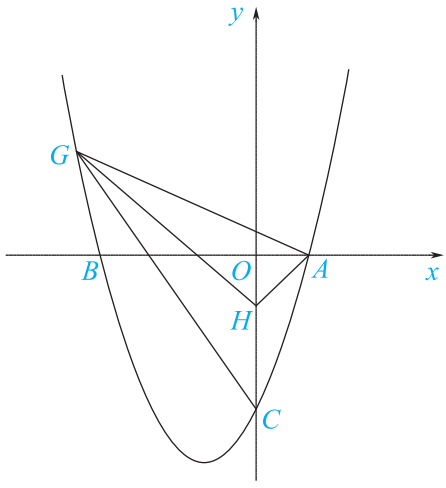


（2）若点 N 为线段 BM 上的一点，过点 N 作 x 轴的垂线，垂足为点 Q，当点 N 在线段 BM 上运动时（点 N 不与点 B、点 M 重合），设 NQ 的长为 t，四边形 $NQAC$ 的面积为 S，求 S 与 t 之间的函数关系式，并写出四边形 $NQAC$ 的面积的最大值；

（3）在抛物线的对称轴上是否存在点 P，使△PAC 为直角三角形？若存在，直接写出所有符合条件的点 P 的坐标.

3．如下图所示，已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(1,0)$和点 B，与 y 轴交于点 $C(0,-3)$.

（1）求抛物线的解析式；

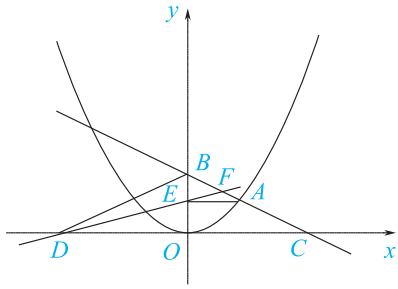


（2）已知点 $H(0,-1)$，在抛物线上是否存在点 G（点 G 在 y 轴的左侧），使得 $S_{\triangle GHC}=S_{\triangle GHA}$？若存在，求出点 G 的坐标；若不存在，请说明理由.

4．如下图所示，在平面直角坐标系中，A 是抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上的一个动点，且点 A 在第一象限内. $AE\perp y$ 轴于点 E，点 B 坐标为$(0,2)$，直线 AB 交 x 轴于点 C，点 D 与点 C 关于 y 轴对称，直线 DE 与 AB 相交于点 F，连接 BD. 设线段 AE 的长为 m，$\triangle BED$ 的面积为 S.

（1）求 S 关于 m（$m\neq 2$）的函数解析式.

（2）设$\frac{AF}{BF}=k$，猜想k与m的数量关系并证明.

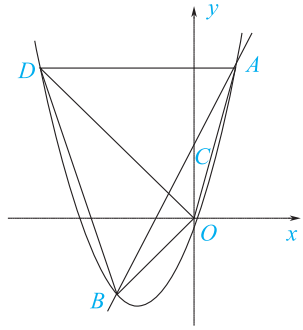


5．如下图所示，二次函数$y=ax^2+bx(a\neq 0)$的图像经过点(1,4)，对称轴是直线$x=-\frac{3}{2}$，线段AD平行于x轴，交抛物线于点D．在y轴上取一点$C(0,2)$，直线AC交抛物线于点B，连接OA，OB，OD，BD.

（1）求该二次函数的解析式；

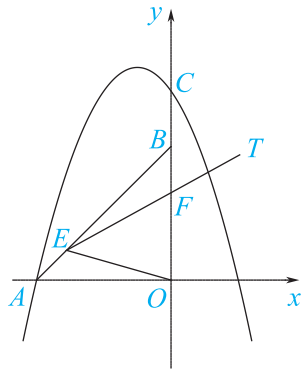
（2）求点B坐标和坐标平面内使$\triangle EOD\backsim\triangle AOB$的点$E$的坐标；

（3）设点F是BD的中点，点P是线段DO上的动点，问PD为何值时，将$\triangle BPF$沿边PF翻折，使$\triangle BPF$与$\triangle DPF$重叠部分的面积是$\triangle BDP$的面积的$\frac{1}{4}$？



6．如下图所示，已知在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为$(-2,0)$，点 B 的坐标为$(0,2)$，点 E 为线段 AB 上的一动点（点 E 不与点 A，B 重合）．以 E 为顶点作 $\angle OET=45°$，射线 ET 交线段 OB 于点 F，C 为 y 轴正半轴上一点，且 $OC=AB$，抛物线 $y=-\sqrt{2}x^2+mx+n$ 的图像经过 A，C 两点.

（1）求此抛物线的函数表达式.

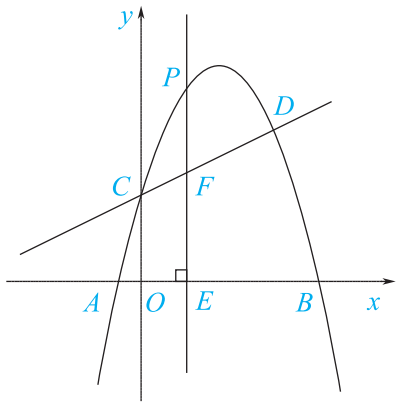


（2）当$\triangle EOF$ 为等腰三角形时，求点 E 的坐标.

（3）在（2）的条件下，设直线 EF 交 x 轴于点 D，P 为（1）中抛物线上一动点，直线 PE 交 x 轴于点 G，在直线 EF 上方的抛物线上是否存在一点 P，使得$\triangle EPF$ 的面积是$\triangle EDG$ 面积的（$2\sqrt{2}+1$）倍？若存在，请直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

7. 如下图所示，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与直线 $y=\frac{1}{2}x+2$ 交于 C，D 两点，其中点 C 在 y 轴上，点 D 的坐标为 $(3,\frac{7}{2})$．点 P 是 y 轴右侧的抛物线上一动点，过点 P 作 $PE\perp x$ 轴于点 E，交 CD 于点 F．

（1）求抛物线的解析式；



（2）若存在点 P，使 $\angle PCF=45°$，请直接写出相应的点 P 的坐标.

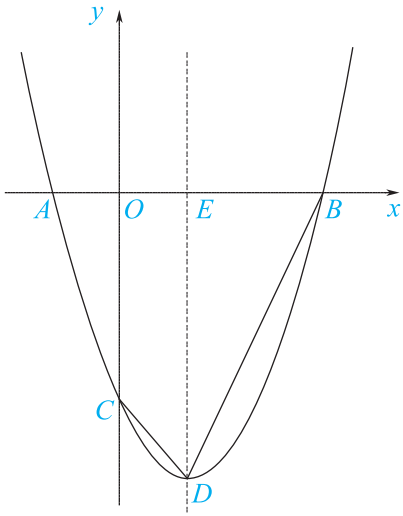
8. 如下图所示抛物线 $y=(x-3)(x+1)$ 与 x 轴交于 A，B 两点（点 A 在点 B 左侧），与 y 轴交于点 C，点 D 为顶点.

（1）求点 B 及点 D 的坐标；

（2）连接 BD，CD，抛物线的对称轴与 x 轴交于点 E.

① 若线段 BD 上一点 P，使$\angle DCP=\angle BDE$，求点 P 的坐标；

② 若抛物线上一点 M，作 $MN\perp CD$，交直线 CD 于点 N，使$\angle CMN=\angle BDE$，求点 M 的坐标.

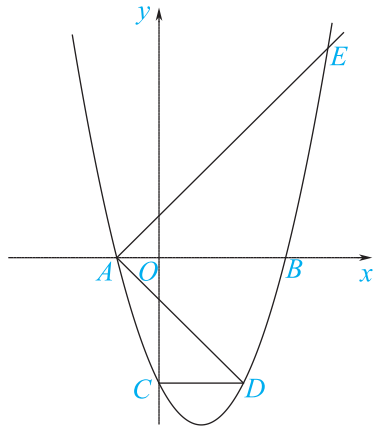


9．如下图所示，二次函数 $y=a(x^2-2mx-3m^2)$（其中 a，m 是常数，且 $a>0$，$m>0$）的图像与 x 轴分别交于点 A、B（点 A 位于点 B 的左侧），与 y 轴交于 $C(0,-3)$，点 D 在二次函数的图像上，$CD\parallel AB$，连接 AD，过点 A 作射线 AE 交二次函数的图像于点 E，AB 平分$\angle DAE$.

（1）用含 m 的代数式表示 a；

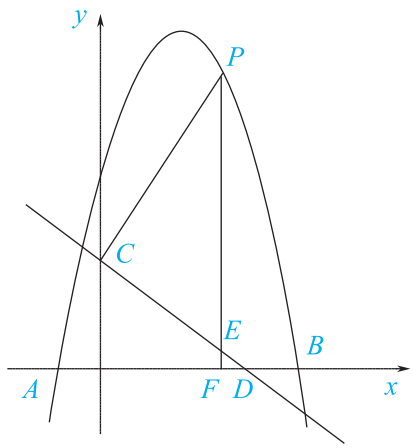
（2）求证：$\frac{AD}{AE}$为定值；

（3）设该二次函数图像的顶点为 F，探索：在 x 轴的负半轴上是否存在点 G，连接 GF，以线段 GF、AD、AE 的长度为三边长的三角形是直角三角形？如果存在，只要找出一个满足要求的点 G 即可，并用含 m 的代数式表示该点的横坐标；如果不存在，请说明理由.



10．如下图所示，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$B(5,0)$ 两点，直线 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 与 y 轴交于点 C，与 x 轴交于点 D．点 P 是 x 轴上方的抛物线上一动点，过点 P 作 $PF\perp x$ 轴于点 F，交直线 CD 于点 E．设点 P 的横坐标为 m.

（1）求抛物线的解析式；

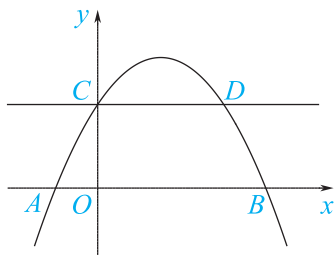


（2）若 $PE=5EF$，求 m 的值；

（3）若点 E' 是点 E 关于直线 PC 的对称点、是否存在点 P，使点 E' 落在 y 轴上？若存在，请直接写出相应的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

11．如下图所示，抛物线 $y=ax^2+bx+2$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$B(4,0)$两点，与 y 轴交于点 C，与过点 C 且平行于 x 轴的直线交于另一点 D，点 P 是抛物线上一动点.

（1）求抛物线的解析式及点 D 的坐标.

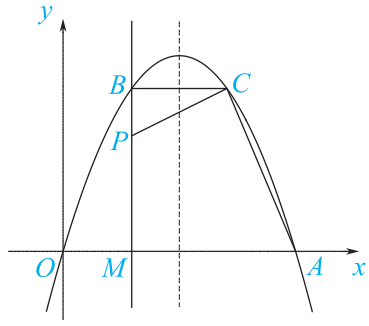


（2）点 E 在 x 轴上，若以 A，E，D，P 为顶点的四边形是平行四边形，求此时点 P 的坐标.

（3）过点 P 作直线 CD 的垂线，垂足为 Q．若将△CPQ 沿 CP 翻折，点 Q 的对应点为 Q'，是否存在点 P，使点 Q'恰好在 x 轴上？若存在，求出此时点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

12．如下图所示，过原点的抛物线 $y=-x^2+2mx$（$m>0$）与 x 轴的另一个交点为 A．过点 $P(1,m)$作直线 $PM\perp x$轴于点 M，交抛物线于点 B．记点 B 关于抛物线对称轴的对称点为 C（B，C 不重合）．连接 CB，CP．

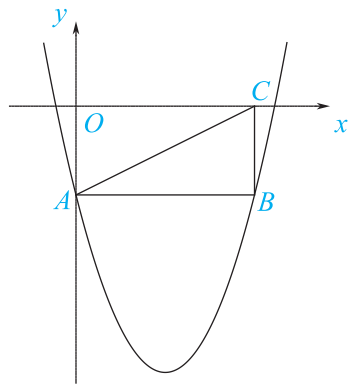
（1）当 $m=3$ 时，求点 A 的坐标及 BC 的长．



（2）过点 P 作 $PE\perp PC$ 且 $PE=PC$，问是否存在 m，使得点 E 落在坐标轴上？若存在，求出所有满足要求的 m 的值，并求出相对应的点 E 的坐标；若不存在，请说明理由．

13．如下图所示，矩形 $OABC$ 的两边在坐标轴上，连接 AC，抛物线 $y=x^2-4x-2$经过 A，B 两点．

（1）求点 A 的坐标及线段 AB 的长.



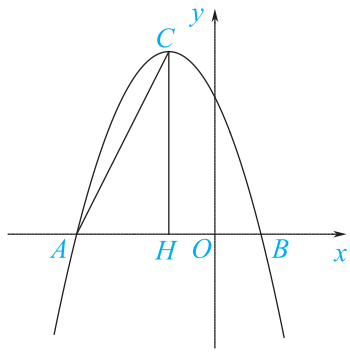
（2）若点 P 由点 A 出发以每秒 1 个单位长度的速度沿 AB 边向点 B 移动，1 秒后点 Q 也由点 A 出发以每秒 7 个单位长度的速度沿折线 AO—OC—CB 向点 B 移动. 当其中一个点到达终点时另一个点也停止移动，点 P 的移动时间为 t 秒.

①当 $PQ\perp AC$ 时，求 t 的值；

②当 $PQ\parallel AC$ 时，对于抛物线对称轴上一点 H，$\angle HOQ>\angle POQ$，求点 H 的纵坐标的取值范围.

14. 如下图所示，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 与 x 轴的两个交点分别为 $A(-3,0)$，$B(1,0)$，过顶点 C 作 $CH\perp x$ 轴于点 H.

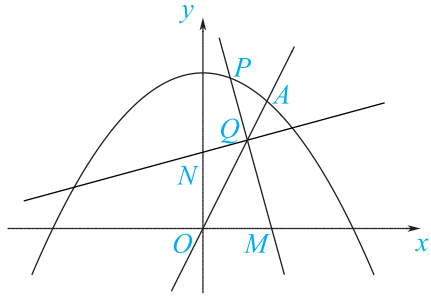
（1）在 y 轴上是否存在点 D，使得△ACD 是以 AC 为斜边的直角三角形？若存在，求出点 D 的坐标；若不存在，说明理由.



（2）若点 P 为 x 轴上方的抛物线上一动点（点 P 与顶点 C 不重合），$PQ\perp AC$ 于点 Q，当△PCQ 与△ACH 相似时，求点 P 的坐标.

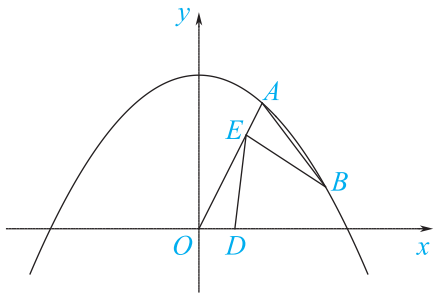
15．如下图所示，已知直线 $y=kx$ 与抛物线 $y=-\frac{4}{27}x^2+\frac{22}{3}$ 交于点 $A(3，6)$.

（1）求直线 $y=kx$ 的解析式和线段 OA 的长度.



（2）点 P 为第一象限内抛物线上一动点，过点 P 作直线 PM，交 x 轴于点 M（点 M 与点 O 不重合），交直线 OA 于点 Q，再过点 Q 作直线 PM 的垂线，交 y 轴于点 N．试探究：线段 QM 与线段 QN 的长度之比是否为定值？如果是，求出这个定值；如果不是，说明理由．

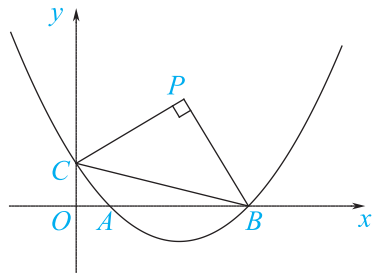
（3）如下图所示，若点 B 为抛物线上对称轴右侧的点，点 E 在线段 OA 上（点 E 与点 O，A 不重合），点 $D(m,0)$是 x 轴正半轴上的动点，且满足$\angle BAE=\angle BED=\angle AOD$，继续探究：$m$ 在什么范围时，符合条件的点 E 的个数分别是 1 个、2 个？



16．如下图所示，已知抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}(b+1)x+\frac{b}{4}$（$b$ 是实数且 $b>2$）与 x 轴的正半轴分别交于点 A，B（点 A 位于点 B 的左侧），与 y 轴的正半轴交于点 C．

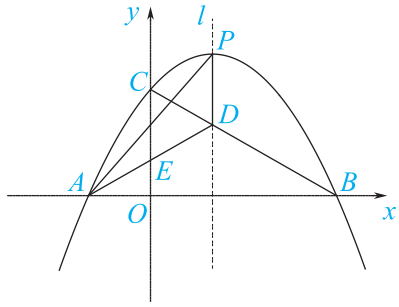
（1）请你探索在第一象限内是否存在点 P，使得四边形 $PCOB$ 的面积等于 $2b$，且△PBC 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形？如果存在，求出点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由．

（2）请你进一步探索在第一象限内是否存在点 Q，使得△QCO、△QOA和△QAB 中的任意两个三角形均相似（全等可看作相似的特殊情况）？如存在，求出点 Q 的坐标；如不存在，请说明理由.



17. 如下图所示，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $A(-\sqrt{3},0)$，$B(3\sqrt{3},0)$，$C(0,3)$三点，线段 BC 与抛物线的对称轴 l 相交于点 D. 设抛物线的顶点为 P，连接 PA，AD，DP，线段 AD 与 y 轴相交于点 E.

（1）求该抛物线的解析式.

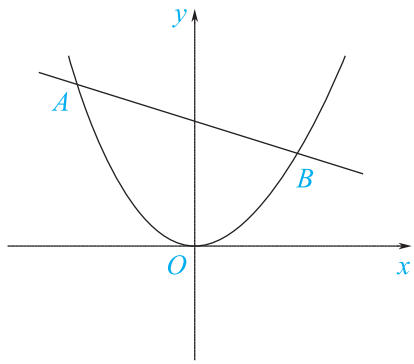


（2）在平面直角坐标系中是否存在点 Q，使以 Q，C，D 为顶点的三角形与△ADP 全等？若存在，求出点 Q 的坐标，若不存在，说明理由.

（3）将∠CED 绕点 E 顺时针旋转，边 EC 旋转后与线段 BC 相交于点 M，边 ED 旋转后与对称轴 l 相交于点 N，连接 PM，DN，若 $PM=2DN$，求点 N 的坐标.

18. 如下图所示，已知直线 AB：$y=kx+2k+4$ 与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 交于 A，B 两点.

（1）直线 AB 总经过一个定点 C，请直接出点 C 坐标；



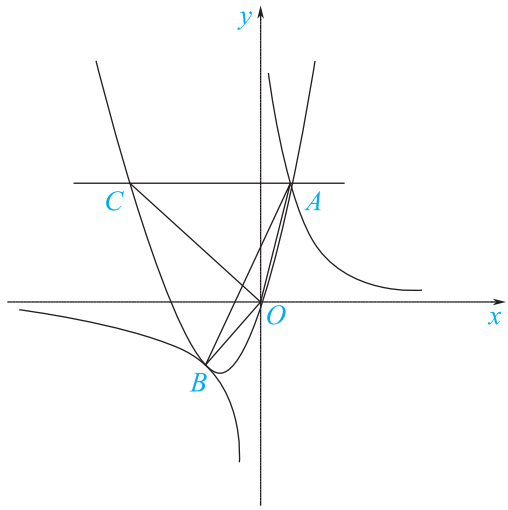
（2）当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，在直线 AB 下方的抛物线上求点 P，使△ABP 的面积等于 5；

（3）若在抛物线上存在定点 D 使$\angle ADB=90°$，求点 D 到直线 AB 的最大距离.

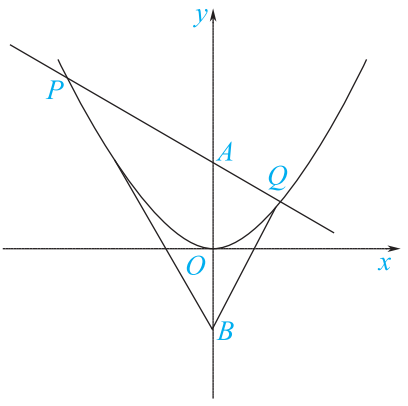
19．如下图所示，抛物线 $y=ax^2+bx$（a＞0）与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 相交于点 A，B．已知点 A 的坐标为(1,4)，点 B 在第三象限内，且△AOB 的面积为 3（O 为坐标原点）.

（1）求实数 a，b，k 的值；

（2）过抛物线上点 A 作直线 $AC\parallel x$ 轴，交抛物线于另一点 C，求所有满足△EOC∽△AOB 的点 E 的坐标.



20．如下图所示，点 A 为 y 轴正半轴上一点，A，B 两点关于 x 轴对称，过点 A 任作直线交抛物线 $y=\frac{2}{3}x^2$ 于 P，Q 两点．



（1）求证：$\angle ABP=\angle ABQ$；

（2）若点 A 的坐标为(0,1)，且 $\angle PBQ=60°$，试求所有满足条件的直线 PQ 的函数解析式．

21．已知 m,n,p 为正整数，$m<n$．设 $A(-m,0)$，$B(n,0)$，$C(0,p)$，O 为坐标原点．若 $\angle ACB=90°$，且 $OA^2+OB^2+OC^2=3(OA+OB+OC)$．求图像经过 A，B，C 三点的二次函数的解析式．

22. 已知抛物线 $y=-\frac{1}{6}x^2+bx+c$ 的顶点为 P，与 x 轴的正半轴交于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$（$x_1<x_2$）两点，与 y 轴交于点 C，PA 是△ABC 的外接圆的切线．设 $M(0,-\frac{3}{2})$，若 $AM//BC$，求抛物线的解析式．

23. 已知抛物线 $y=-\frac{1}{6}x^2+bx+c$ 的顶点为 P，与 x 轴的正半轴交于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$（$x_1<x_2$）两点，与 y 轴交于点 C，PA 是△ABC 的外接圆的切线．将抛物线向左平移 $24(\sqrt{3}-1)$ 个单位，得到的新抛物线与原抛物线交于点 Q，且 $\angle QBO=\angle OBC$，求抛物线的解析式．

第8讲

相似三角形


1. 相似、相似比的概念；
2. 熟练掌握相似形的性质（对应角相等，对应线段长度之比等于相似比，对应面积之比等于相似比的平方）；
3. 熟练掌握三角形的判定定理；
4. 会适当添加辅助线构造相似解决问题.

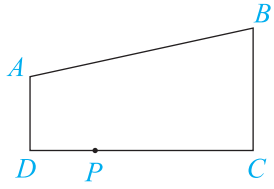
内容概要

1. 相似、相似比的概念；
2. 熟练掌握相似形的性质（对应角相等，对应线段长度之比等于相似比，对应面积之比等于相似比的平方）；
3. 熟练掌握三角形的判定定理；
4. 会适当添加辅助线构造相似解决问题；
5. 会用三角形的相似去计算长度和角度，证明一些结论及解决一些实际应用问题.

例题与习题

一、三角形相似的判定

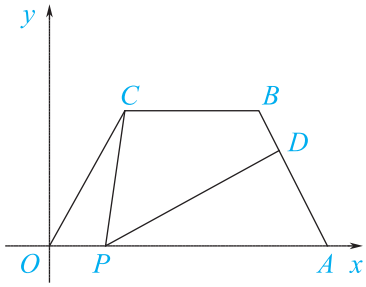
1. 如下图所示，$AD \parallel BC$，$\angle D=90°$，$AD=2$，$BC=5$，$DC=8$. 若在边 DC 上有点 P，使$\triangle PAD$ 与$\triangle PBC$ 相似，则这样的点 P 有_____个，线段 PD 的可能长度有_____.



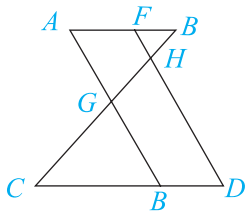
2. 如下图所示，平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 是等腰梯形，$BC \parallel OA$，$OA=7$，$AB=4$，$\angle COA=60°$，点 P 为 x 轴上的一个动点，点 P 不与点 O、A 重合，连接 CP，过点 P 作 PD 交 AB 于点 D.

（1）当点 P 运动到什么位置时，$\triangle OCP$ 为等腰三角形，求这时点 P 的坐标；

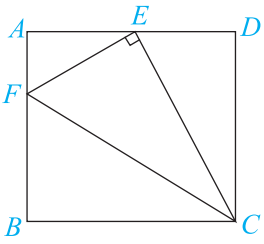
（2）当点 P 运动到什么位置时，使得 $\angle CPD=\angle OAB$，且 $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{5}{8}$，求这时点 P 的坐标.



3．如下图所示，$AB\parallel CD$，$AE\parallel FD$，AE、FD 分别交 BC 于点 G、H，则图中共有相似三角形_____对.



4．如下图所示，已知 E 是矩形 $ABCD$ 边 AD 的中点，F 是 AB 上一点，$EF\perp CE$．若 $AB:BC=\sqrt{3}:2$，则图中（有 4 个三角形）相似三角形有_____对.



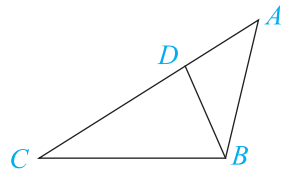
5．如下图所示，在 $\triangle ABC$ 中，D 是边 AC 上一点，下面 4 种情况中，$\triangle ABD\backsim\triangle ACB$ 不一定成立的情况是（　　）.

A．$AD\cdot BC=AB\cdot BD$

B. $AB^2 = AD \cdot AC$

C. $\angle ABD = \angle ACB$

D. $AB \cdot BC = AC \cdot BD$



二、利用三角形相似计算或证明

1. 在△ABC 中, $\angle BAC$=90 °, AC=$\sqrt{3}$, AB=4, D 为边 BC 上一点, $\angle CAD$=30 °, 则 AD 的长为_____.

2. 在△ABC 中，最大角$\angle A$ 是最小角$\angle C$ 的 2 倍，且 AB=7，AC=8．求 BC.

3. 在△ABC 中，$\angle B = 2\angle A$，求证$b^2 = a^2 + ac$．（其中 a，b，c 分别是$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边）

4. 在△ABC 中，$\angle A > \angle B > \angle C$且$\angle A = 2\angle B$．若三角形三边长为整数，面积也为整数，求△$ABC$ 面积的最小值.

5．在△ABC中，$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:4$．证明：$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{BC}$．

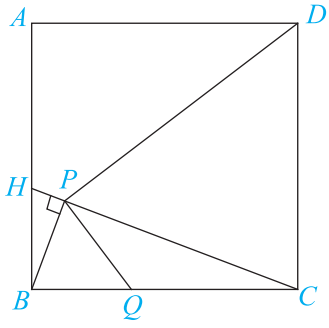
6．在△ABC中，$\angle BAC:\angle ABC:\angle ACB=4:2:1$，$AD$是$\angle BAC$的平分线．有如下三个结论：①$BC:AC:AB=4:2:1$；②$AC=AD+AB$；③△$DAC$∽△$ABC$．

其中正确的结论是（　　）．

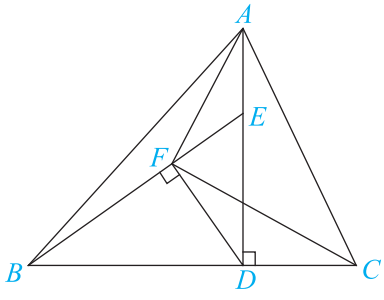
A．①②　　B．②③　　C．①③　　D．①②③

7．如下图所示，H、Q分别是正方形$ABCD$的边AB、BC上的点，且$BH=BQ$，过B作HC的垂线，垂足为P．

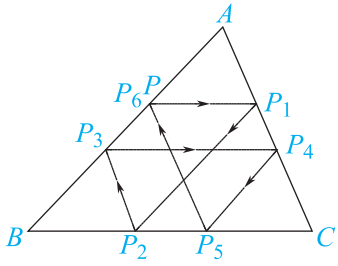
求证：$DP\perp PQ$．



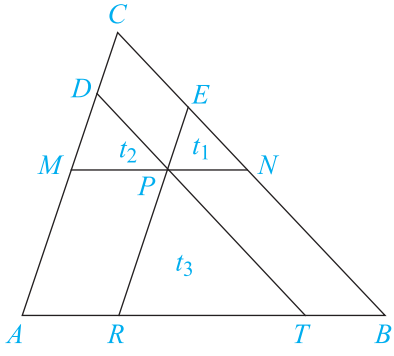
8．如下图所示，AD是锐角△ABC边BC上的高，E是AD上的一点且满足$\frac{AE}{ED}=\frac{CD}{DB}$，过$D$作$DF\perp BE$于$F$．求证：$\angle AFC=90°$



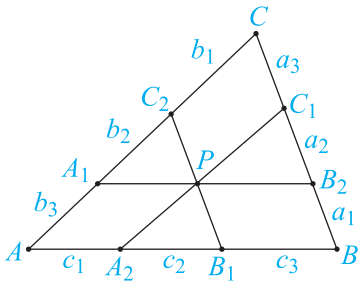
9. 如下图所示，已知△ABC的周长为2015厘米. 一只小松鼠位于AB上（点A、B除外）的点P，小松鼠首先由点P沿平行于边BC的方向跑到边AC上的点P_1后，立即改变方向，再沿平行于AB的方向奔跑，当跑到BC边上的P_2后，又立即改变方向，沿平行于CA边的方向奔跑，当跑到AB边上的点P_3后，又立即改变方向，沿平行于边BC的方向奔跑……此后按上述规律一直跑下去. 问小松鼠能否再返回到点P？如果能再回到点P，那么要跑多少路程？



10. 如下图所示，P是△ABC内一点，过P分别作直线平行于△ABC的各边，所成的小三角形t_1、t_2和t_3的面积分别是4、9和49. 求△ABC的面积.

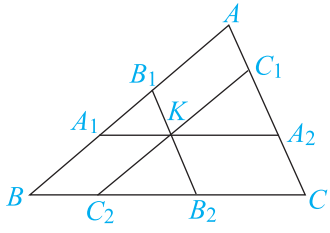


11．经过△ABC内任一点P分别引平行于三角形三边的直线，它们将三边依次分成长为a_1,a_2,a_3；b_1,b_2,b_3；c_1,c_2,c_3的线段，如下图所示．求证：$a_1b_1c_1=a_2b_2c_2=a_3b_3c_3$.

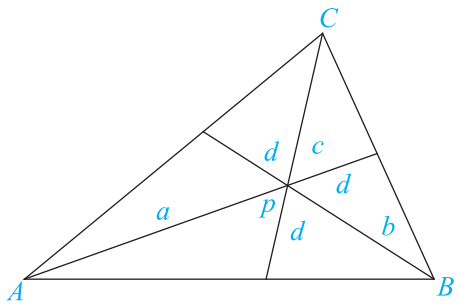


12．在△ABC内任取一点K，过K引直线$A_1A_2/\!/BC$，$B_1B_2/\!/AC$，$C_1C_2/\!/AB$．如下图所示．

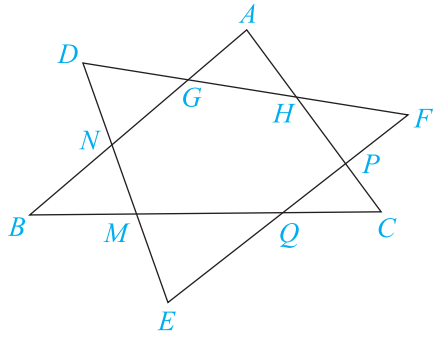
证明：$\dfrac{A_1A_2}{BC}+\dfrac{B_1B_2}{AC}+\dfrac{C_1C_2}{AB}$与$K$点的选取无关．



13. 令 P 是$\triangle ABC$ 的一个内点，延长 AP、BP、CP 与对边相交如下图所示. 图中 a、b、c、d 为各线段之长. 已知：$a+b+c=43$，$d=3$. 求 abc 的值.

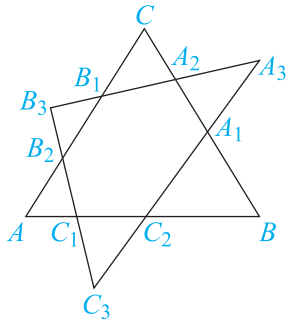


14. 如下图所示，若 $\frac{GH}{DF}=\frac{PQ}{EF}=\frac{MN}{DE}$，求证：$\frac{GN}{AB}=\frac{PH}{AC}=\frac{MQ}{BC}$.



15．等边三角形 ABC 的三条边上，有三条相等的线段 A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2．

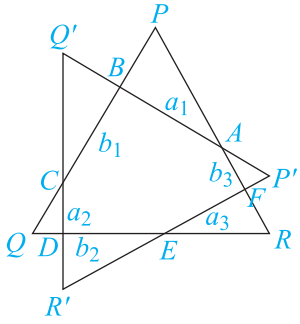
证明：B_2C_1，C_2A_1，A_2B_1 所在直线交成的三角形 $A_3B_3C_3$ 中，线段 A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2 与它们所在的三角形 $A_3B_3C_3$ 的边成比例．（即 $\frac{B_1A_2}{B_3A_3}=\frac{C_1B_2}{C_3B_3}=\frac{A_1C_2}{A_3C_3}$）



16．如下图所示，$\triangle PQR$ 和 $\triangle P'Q'R'$ 是两个全等的等边三角形．六边形 $ABCDEF$ 的边长分别记为：$AB=a_1$，$BC=b_1$；$CD=a_2$，$DE=b_2$；$EF=a_3$，$FA=b_3$

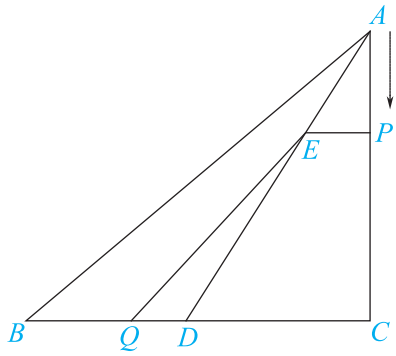
求证：（1）$a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$；

（2）$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$



三、动态问题

1．如下图所示，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=4$cm，$BC=5$cm，点 D 在 BC 上，且 $CD=3$cm，现有两个动点 P，Q 分别从点 A 和点 B 同时出发，其中点 P 以 1cm/s 的速度沿 AC 向终点 C 运动；点 Q 以 1.25cm/s 的速度沿 BC 向终点 C 运动．过点 P 作 $PE\parallel BC$ 交 AD 于点 E，连接 EQ．设动点运动时间为 t（$t>0$）．



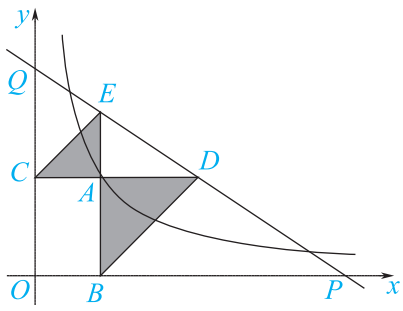
（1）连接 DP，经过 1 秒后，四边形 $EQDP$ 能够成为平行四边形吗？请说明理由．

（2）连接 PQ，在运动过程中，判断线段 PQ 与线段 AB 的位置关系，并说明理由．

（3）当 t 为何值时，△EDQ 为直角三角形？

2．如下图所示，已知动点 A 在函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$ 的图像上，$AB\perp x$ 轴于点 B，

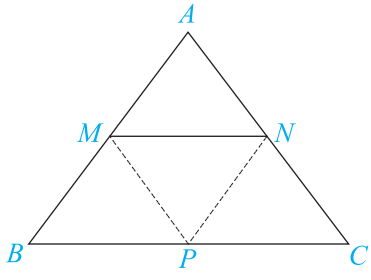
$AC\perp y$ 轴于点 C，延长 CA 至点 D，使 $AD=AB$，延长 BA 至点 E，使 $AE=AC$．直线 DE 分别交 x 轴，y 轴于点 P、Q．当 $QE:DP=4:9$ 时，求图中阴影部分的面积．



3．在等腰△ABC 中，$AB=AC=5$，$BC=6$，动点 M、N 分别在两腰 AB、AC 上（M 不与 A、B 重合，N 不与 A、C 重合），且 $MN\parallel BC$，将△AMN 沿 MN 所在的直线折叠，使点 A 的对应点为 P．

（1）当 MN 为何值时，点 P 恰好落在 BC 上？

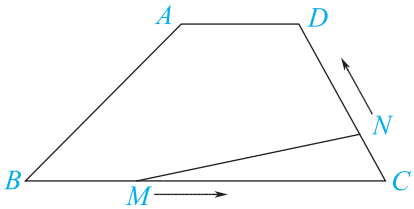
（2）当 MN 为何值时，△MNP 与等腰△ABC 重叠部分的面积最大？求出此最大值．



4. 如下图所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AD=3$，$DC=5$，$AB=4\sqrt{2}$，$\angle B=45^\circ$．动点 M 从 B 点出发沿线段 BC 以每秒 2 个单位长度的速度向终点 C 运动；动点 N 同时从 C 点出发沿线段 CD 以每秒 1 个单位长度的速度向终点 D 运动，设运动的时间均为 t 秒.

（1）当 $MN \parallel AB$ 时，求 t 的值；

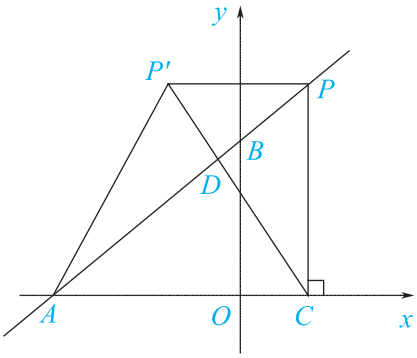
（2）试探究：t 为何值时，$\triangle MNC$ 为等腰三角形.



5. 如下图所示，在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，点 A 的坐标为$(-4,0)$，点 B 的坐标为$(0,b)$（$b>0$）．P 是直线 AB 上的一个动点，作 $PC \perp x$ 轴，垂足为 C，记点 P 关于 y 轴的对称点为 P'（点 P'不在 y 轴上），连接 PP'，$P'A$，$P'C$，设点 P 的横坐标为 a.

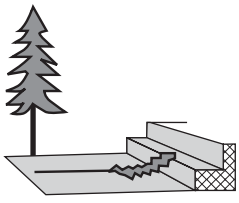
（1）若点 P 在第一象限，记直线 AB 与 $P'C$ 的交点为 D，当 $P'D : DC=1 : 3$ 时，求 a 的值.

（2）是否同时存在 a，b，使△$P'CA$ 为等腰直角三角形？若存在，请求出所有满足要求的 a，b 的值；若不存在，请说明理由.



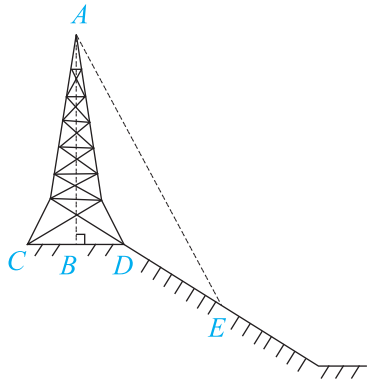
四、影子问题（原理：同一时刻的物高与影长成比例）

1．兴趣小组的同学要测量树的高度，在阳光下，一名同学测得一根长为 1 米的竹竿的影长为 0.4 米，同时另一名同学测量树的高度时，发现树的影子不全落在地面上，有一部分落在教学楼的第一级台阶上，测得此影子长为 0.2 米，一级台阶高为 0.3 米．如下图所示，若此时落在地面上的影长为 4.4 米，求树高.

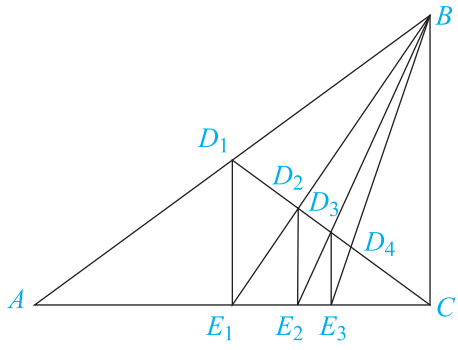


2．如下图所示，在斜坡的顶部有一铁塔 AB，B 是 CD 的中点，CD 是水平的，在阳光的照射下，塔影 DE 留在坡面上．已知铁塔底宽 CD=12 米，塔影长 DE=18 米，小明和小华的身高都是 1.6 米，同一时刻，小明站在点 E 处，影子在坡面上，

小华站在平地上，影子也在平地上，两人的影长分别为 2 米和 1 米，那么塔高 AB 为_____米.



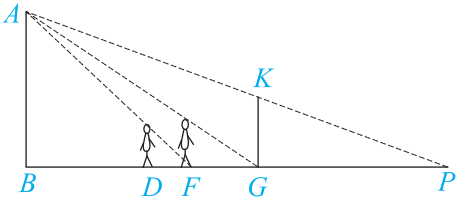
3. 如下图所示，已知 Rt$\triangle ABC$，D_1 是斜边 AB 的中点，过点 D_1 作 $D_1E_1\perp AC$ 于点 E_1，连接 BE_1 交 CD_1 于点 D_2，过点 D_2 作 $D_2E_2\perp AC$ 于点 E_2，连接 BE_2 交 CD_1 于点 D_3，过点 D_3 作 $D_3E_3\perp AC$ 于点 E_3……可以依次得到点 D_4，D_5，…，D_n，分别记$\triangle BD_1E_1$，$\triangle BD_2E_2$，$\triangle BD_3E_3$，…$\triangle BD_nE_n$ 的面积为 S_1，S_2，…，S_n，则 S_n=_____$S_{\triangle ABC}$（用含 n 的代数式表示）.



4. 如下图所示，小明、小刚站在路灯 AB 下，且 B、D、F、G 在同一直线上，测得小明的影长 DF=3 米. 小刚的影长 FG=5 米. 若小明的身高为 1.6 米，小刚的身高是 1.88 米；

（1）求路灯 AB 的高度；

（2）若小明的眼睛与地面的距离为 1.58 米，此时在 G 处的旗杆 GK 恰巧处于小明的盲区内，求旗杆 GK 的高及旗杆的影长 GP.

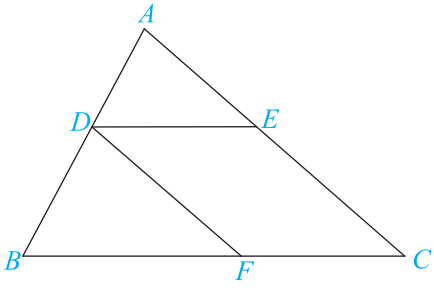


五、三角形的内接四边形

1．如下图所示，D 是△ABC 边 AB 上一点，作 DE∥BC 交 AC 于 E，作 DF∥AC 交 BC 于 F，记△ADE、△DBF、△ABC 的面积分别为 S_1, S_2, S.

则（1）$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$ ；

（2）比较 S_{DECF} 与 S_1+S_2 的大小.

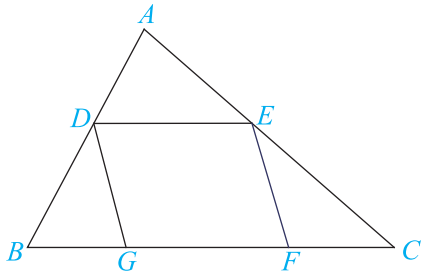


2．如下图所示，四边形 $DEFG$ 为△ABC 的内接平行四边形，设△ADE、△EFC、△DGB、△ABC 的面积分别为 S_1， S_2， S_3， S.

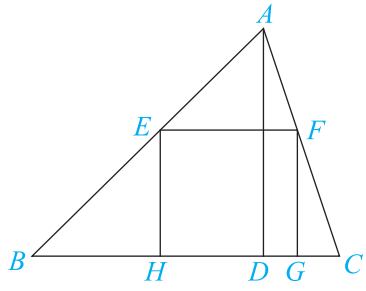
（1）求出 S 用 S_1， S_2， S_3 表示的式子；

（2）求出 S_{DEFG} 用 S_1, S_2, S_3 表示的式子；

（3）比较 S_{DEFG} 与 $S_1+S_2+S_3$ 的大小关系.

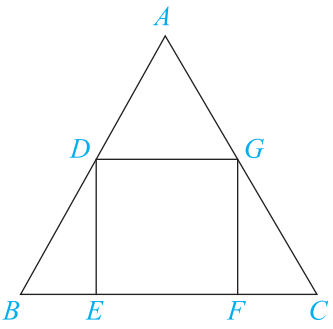


3．如下图所示，正方形 $EFGH$ 内接于△ABC，设 $BC=\overline{ab}$（一个两位数），$EF=c$，三角形的高 $AD=d$，若 a、b、c、d 是依次变大的四个连续正整数，求△ABC 的面积.



4．$\triangle ABC$ 的面积是它的内接矩形 $PQRS$ 面积的 3 倍，且边 BC 和高 AD 的值是有理数，问矩形 $PQRS$ 的周长的值在什么情况下是有理数？什么情况下是无理数？

5．如下图所示，面积为 $a\sqrt{b}-c$ 的正方形 $DEFG$ 内接于面积为 1 的正三角形 ABC，其中 a，b，c 是整数，且 b 不能被任何质数的平方整除，则 $\dfrac{a-c}{b}$ 的值为_____.



第9讲

三角形的内心





内心定义

三角形的三条内角平分线恰好交于一点，它也是三角形内切圆的圆心，称为三角形的内心.



性　　质

性质 1　三角形的内心到三角形三边距离相等.

性质 2　设 I 是$\triangle ABC$ 的内心，则 $\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$；$\angle AIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle B$；$\angle AIB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle C$

证明：

例 1　D 是$\triangle ABC$的内心，E 是$\triangle ABD$ 的内心，F 是$\triangle BDE$ 的内心，若 $\angle BFE$ 的度数是整数，求 $\angle BFE$ 的最小度数.

性质 3 设 I 是△ABC 的内心，连接 AI 并延长交△ABC 的外接圆于另一点 M，则 $MI = MB = MC$.

思考： 性质 3 的逆命题是否成立？即若 I 是 AM 上一点（其余条件不变），且 $MI = MB = MC$，那么 I 是否一定是内心？

【提示】答案是肯定的．如何证明？

例 2 在△ABC 的外接圆的弧 AB（不含点 C）、弧 BC（不含点 A）上分别取点 k，L 使得直线 $KL \parallel AC$.

证明：△ABK 和△CBL 的内心到弧 AC（含点 B）的中点的距离相等.

性质 4 设 I 是△ABC 的内心，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，内切圆半径为 r，三角形面积为 S，记 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$，则 $S = pr \Leftrightarrow r = \dfrac{2S}{a+b+c}$.

证明：

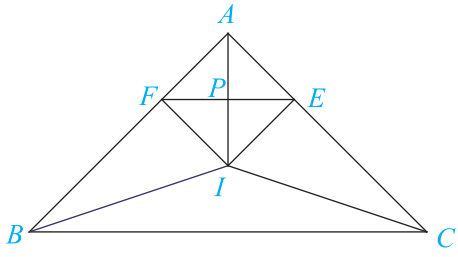
注：三角形的半周长是几何计算及证明中常用的量．若与海伦公式联用会产生意想不到的效果．例如下面这例：

例 3　设 I 是△ABC 的内心，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，内切圆半径为 r，三角形面积为 S，记 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

证明：$abc\cdot r=p\cdot AI\cdot BI\cdot CI$

内心由于是内角平分线的交点，因而有些题目也要用到内角平分线的性质. 例如：

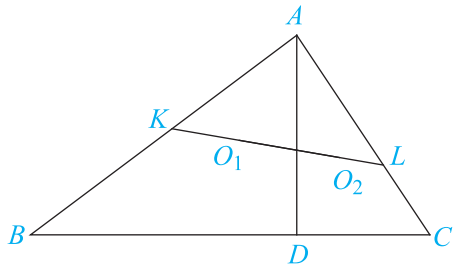
例 4　如下图所示，I 是等腰 Rt△ABC 的内心，IE，IF 分别是 $\angle AIC$，$\angle AIB$ 的平分线. 若斜边 $BC=2$，AI 与 EF 交于点 P，求 IP.



例 5　过△ABC 的内心 I 任作一直线，分别交 AB，AC 于 P，Q 两点，求证：$\dfrac{AB}{AP}\cdot AC+\dfrac{AC}{AQ}\cdot AB=AB+AC+BC$

例 6　如下图所示，在 Rt△ABC 中，AD 是斜边 BC 上的高，连接△ABD 与△ACD 的内心的直线，分别与 AB，AC 边交于 K，L，△ABC 与△AKL 的面积分

别记为 S，T，求证：$S \geq 2T$.



例 7　设 I 是△ABC 的内心，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$\angle A$ 的平分线交 BC 于 K，交△ABC 的外接圆于 D，求证：

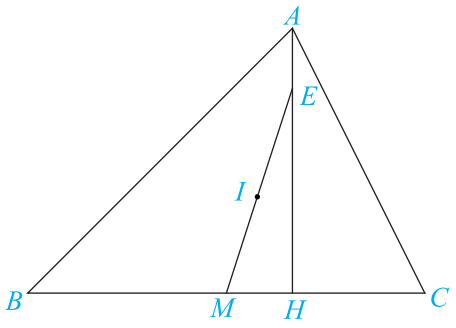
$$\frac{AI}{KI}=\frac{AD}{DI}=\frac{DI}{DK}=\frac{b+c}{a}$$

例 8　在△ABC 中，$AB=4$，$AC=6$，$BC=5$，$\angle A$ 的平分线 AD 交△ABC 的外接圆于 K. 点 O、I 分别是△ABC 的外心和内心，求证：$OI \perp AK$.

例 9　设△ABC 的内心为 I，△ABC 内一点 P 在 BC、CA、AB 上的射影分别为 D、E、F，当 P 与 I 重合时，求式 $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ 的值最小.

例 10　如下图所示，设点 M 是△ABC 的 BC 边的中点，I 是其内心，AH 是 BC 边上的高，E 为直线 IM 与 AH 的交点．求证：

AE 等于内切圆半径 r.



例 11　（欧拉公式）设三角形的外接圆半径、内切圆半径分别为 R、r，其外心、内心分别为 O、I，若 $IO = d$，则 $d^2 = R^2 - 2Rr$.

第 10 讲

三角形的外心


1. 三角形的外心是三角形三边中垂线的交点.
2. 三角形所在平面上一点是其外心的充要条件是：该点到三角形三顶点的距离相等.



定　义

三角形外接圆的圆心，称为三角形的外心



性　质

1．三角形的外心是三角形三边中垂线的交点.

2．三角形所在平面上一点是其外心的充要条件是：该点到三角形三顶点的距离相等.

例 1　设△ABC 的内心为 I，连接 AI 与△ABC 的外接圆⊙O 交于另一点 E，AE与BC 交于 D．设△ABC 的外接圆与内切圆半径分别为 R 和 r，求证：

（1）E 是△BCI 的外心；

（2）$AD\cdot AE=AB\cdot AC$；

（3）$AI\cdot IE=2Rr$；

（4）$OI^2=R^2-2Rr$

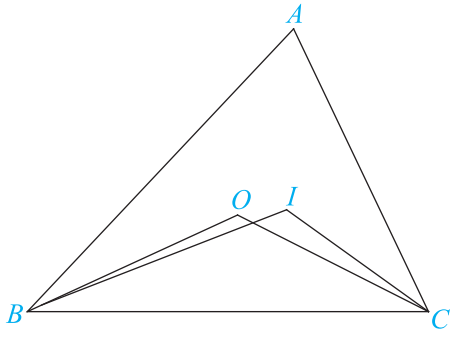
3．点 O 是$\triangle ABC$ 的外心：

（1）若点 O 和点 C 在 AB 的同侧，则 $\angle AOB=2\angle C$ ；

（2）若 O 和 C 在 AB 的两侧，则 $\angle AOB=360^\circ-2\angle C$.

性质 3 是竞赛考察的热点，也常结合其他性质考察．通过（1）现成的明显的外心；（2）发现隐蔽的外心；或（3）构造外心，利用性质 3，求出某些关键角的度数，结合等腰三角形、正三角形等特殊三角形，再转换成边的关系.

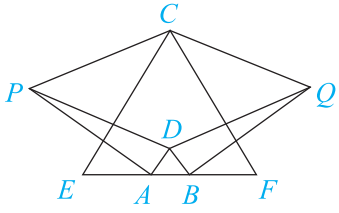
例 2　如下图所示，在$\triangle ABC$ 中，点 O 是外心，点 I 是内心，若 $\angle BOC=\angle BIC$ ，求 $\angle A$.



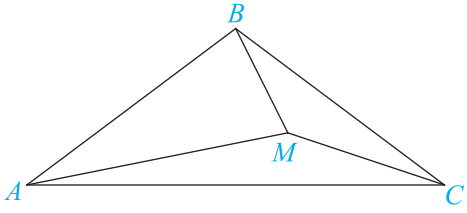
例 3　已知 AB 是半径为 1 的⊙O 的一条弦，且 $AB=a<1$．以 AB 为一边在⊙O 内作正$\triangle ABC$，D 是⊙O 上不同于 A 的一点，且 $DB=AB=a$，DC 的延长线与⊙O 交于点 E，求 AE 的长.

例 4　锐角△ABC 的外心为 O，线段 OA，BC 的中点分别为 M，N，$\angle ABC=4\angle OMN$，$\angle ACB=4\angle OMN$，求$\angle OMN$.

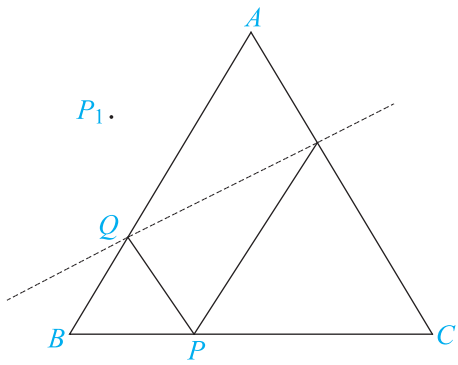
例 5　如下图所示，若 $EF=CE=CF$，$EA=BF=2AB$，$AB=BD=DA$，$AP=CP=BQ=CQ=PD=DQ=1$．则 $BD=$？



例 6　如下图所示，在△ABC 中，已知 $\angle BAC=\angle BCA=44°$，$M$ 是△ABC 内一点，使得 $\angle MCA=30°$，$\angle MAC=16°$，求 $\angle BMC$ 的度数.



例 7　如下图所示，在等腰△ABC 中，P 为底边 BC 上任意一点，过 P 作两腰的平行线分别与 AB、AC 交于 Q、R 两点，又 P_1 是 P 关于直线 RQ 的对称点，求证：P_1 在△ABC 的外接圆上.



4．判定定理：(1) 若点 O 和点 C 在 AB 的同侧，且 $OA=OB$，$\angle AOB=2\angle C$，则点 O 是△ABC 的外心；

(2) 若点 O 和点 C 在 AB 的两侧，且 $OA=OB$，$\angle AOB=360°-2\angle C$，则点 O 是△ABC 的外心.

该定理的证明是很有趣的，巧妙利用了四点共圆.

5．正弦定理：设△ABC 外接圆半径为 R，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，则 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=aR$.

请用几何法证明.

6．设△ABC 外接圆半径为 R，三边长分别为 a、b、c，面积为 S，则 $S=\dfrac{abc}{4R}$，$R=\dfrac{abc}{4S}$.

证明：

例 8　△ABC 的三边长分别为 a、b、c，其外接圆与内切圆半径分别为 R 和 r，求证：$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=\dfrac{1}{2Rr}$.

例 9　在△ABC 中，$AB=8+2\sqrt{6}$，$BC=7+\sqrt{6}$，$CA=3+\sqrt{6}$，点 O，I 分别是△ABC 的外心和内心，求 OI 的长.

7．直角三角形的外心为斜边中点，锐角三角形的外心在形内，钝角三角形的外心在形外.

这个结论的逆命题显然成立. 特别是直角三角形这一条性质，常用来判定直角.

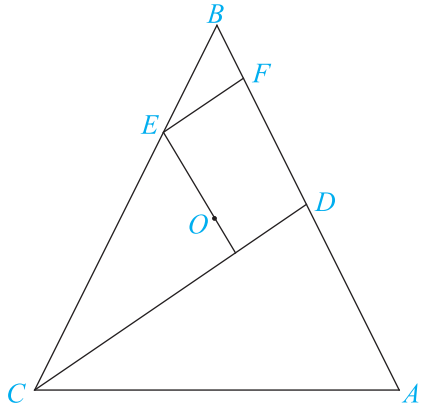
例 10　在四边形 $PQRS$ 中，A、B、C、D 分别为 PQ、QR、RS、SP 的中点，M 为 CD 中点，若 AM 上有一点 H，使 $HC=BC$．求证：$\angle BHM=90°$．



思考题

例 11　证明卡诺定理：三角形外心到三边的有向距（外心在边的形内一侧的距离为正，形外为负）之和等于其外接圆与内切圆半径之和．

例 12　如下图所示，在等腰△ABC 中，$AB=AC$，CD 是它的角平分线，点 O 是它的外心，过点 O 作 CD 的垂线交 BC 于点 E，再过点 E 作 CD 的平行线交 AB 于 F．证明：$BE=FD$．

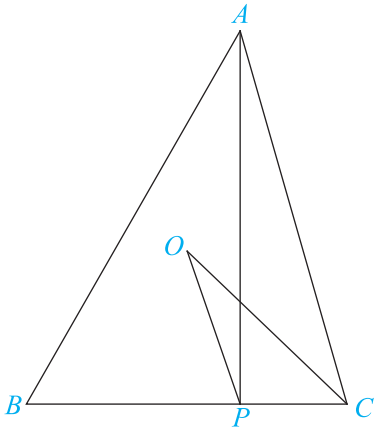


例 13　在△ABC 的外心 O 任作一直线与边 AB、AC（或其延长线）分别相交于 P，Q 两点，则：

$$\frac{AB}{AP}\cdot\sin 2B+\frac{AC}{AQ}\cdot\sin 2C=\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C,\text{或}\frac{BP}{AP}\cdot\sin 2B+\frac{CQ}{AQ}\cdot\sin 2C=\sin 2A.$$

例 14　如下图所示，锐角△ABC 的外心为 O，从 A 作 BC 的高，垂足为 P，且 $\angle BCA\geq\angle ABC+30^\circ$.

证明：$\angle CAB+\angle COP<30^\circ$



第 11 讲

三角形的重心


三角形三条中线必交于一点，称该点为三角形的重心.
三条中线必交于一点，很容易由赛瓦定理得到，这是重心的唯一性，有时可用其证明线共点.

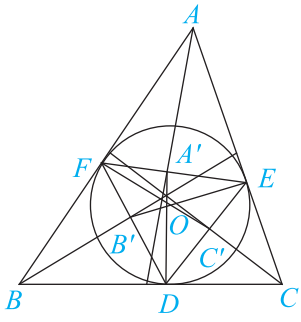


定　义

三角形三条中线必交于一点，称该点为三角形的重心.

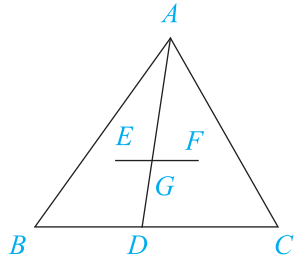
三条中线必交于一点，很容易由赛瓦定理得到，这是重心的唯一性，有时可用其证明线共点.

例 1　如下图所示，设⊙O是△ABC的内切圆，BC，CA，AB上的切点分别是D,E,F. 射线DO交EF于A'点，同样可得B'，C'点，求证：AA'，BB'，CC'共点.

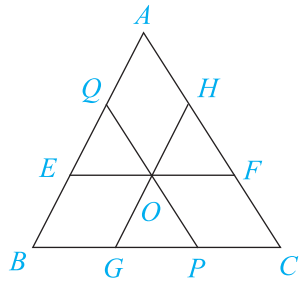


性质 1：设G点为△ABC的重心，连接AG并延长交BC于D点，则$\dfrac{AG}{GD}=2$.

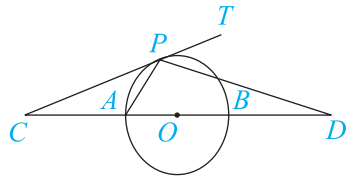
例 2　如下图所示，D点是△ABC的边BC上的一点，点E,F分别是△ABD和△ACD的重心，连接E，F交AC于点G，求$\dfrac{DG}{GA}$.



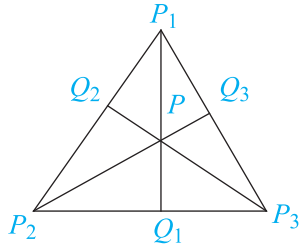
例 3　如下图所示，点 O 在锐角△ABC 内，过 O 点作 $EF \parallel BC$，$PQ \parallel CA$，$HG \parallel AB$，若 $\frac{EF}{BC}=\frac{PQ}{CA}=\frac{HG}{AB}$，问：$O$ 点是△ABC 的什么心？



例 4　如下图所示，已知 $CA=AB=BD$，AB 为⊙O 的直径，CT 切⊙O 于点 P，求证：$\angle APC=\angle DPT$.



例 5　（第三届 IMO）如下图所示给出△$P_1P_2P_3$ 及内部任一点 P，直线 P_1P，P_2P，P_3P 分别交对边于点 Q_1，Q_2，Q_3，求证：$\frac{P_1P}{PQ_1}$，$\frac{P_2P}{PQ_2}$，$\frac{P_3P}{PQ_3}$ 三者之中，至少有一个不大于 2，也至少有一个不小于 2.



性质 2：中线长公式——设 G 点为$\triangle ABC$ 的重心，连接 AG 并延长交 BC 于点 D，则 $AD^2=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2)-\frac{1}{4}BC^2$.

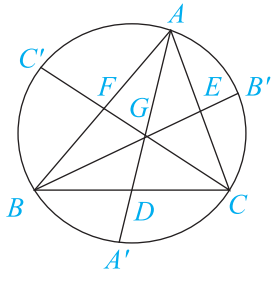
例 6　证明：以锐角三角形各边为直径作圆，从相对顶点作切线，得到的六个切点共圆.

例 7　如下图所示，设 G 点为$\triangle ABC$ 的重心，AG，BG，CG 分别交对边于 D，E，F，交$\triangle ABC$ 的外接圆于 A'，B'，C' 三点.

求证：(1) $\frac{A'D}{DA}+\frac{B'E}{EB}+\frac{C'F}{FC}\geq 1$ ；

(2) $\sqrt{\frac{A'D}{DA}}+\sqrt{\frac{B'E}{EB}}+\sqrt{\frac{C'F}{FC}}\geq 3$.

注：本题的关键是通过圆幂定理将相关比值用中线长表示，从而使用中线长公式.



例 8　证明重心的下列性质.

性质 3：设 G 点为$\triangle ABC$ 的重心，P 点为$\triangle ABC$ 内任意一点，则：

（1） $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2)$ ；

（2） $AP^2+BP^2+CP^2=AG^2+BG^2+CG^2+3PG^2$ ；

（3）莱布尼兹公式： $AP^2+BP^2+CP^2=3PG^2+\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2)$.

例 9　证明重心的下列性质.

性质 4：设 G 点为△ABC 内一点，则 G 点为△ABC 的重心的充要条件是下列条件之一：

（1） $S_{\triangle GBC}=S_{\triangle GCA}=S_{\triangle GAB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$ ；

（2）当点 G 在三边上的射影分别为 D，E，F 时，$GD\cdot GE\cdot GF$ 的值最大；

（3）当 AG，BG，CG 的延长线分别交三边于 D，E，F 时，则 $S_{\triangle AFG}=S_{\triangle BDG}=S_{\triangle CEG}$ ；

（4）过 G 点的直线交 AB 于点 P，交 AC 于点 Q，则 $\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=3$ ；

（5） $BC^2+3GA^2=CA^2+3GB^2=AB^2+3GC^2$.

证明：

（1）必要性：

充分性：

（2）必要性和充分性可以一起证.

（3）必要性：

充分性：

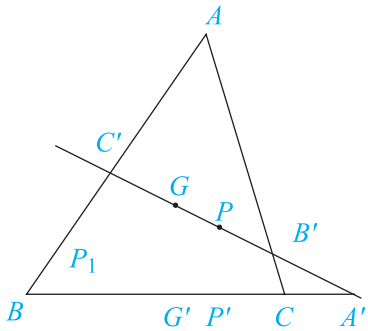
（4）必要性：

充分性：

（5）必要性：

充分性：

例 10　如下图所示，在△ABC 中，G 点为重心，P 点为三角形内一点，直线 PG 交直线 BC，CA，AB 分别于 A'，B'，C'，求证：$\dfrac{A'P}{A'G}+\dfrac{B'P}{B'G}+\dfrac{C'P}{C'G}=3$.



例 11　已知△ABC 的三边 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，面积为 S，△DEF 是△ABC 的任意内接三角形，试用 a，b，c，S 表示△DEF 的三边平方和的最小值.

例 12　设 P 点是锐角△ABC 内一点，射线 AP，BP，CP 分别交 BC，CA，AB 于点 D，E，F，证明点 P 为△ABC 重心的充分必要条件是△DEF∽△ABC.

例 13　证明下面性质.

性质 5：设 G 点为$\triangle ABC$ 的重心，AD，BE 是两条中线，则 $AG^2+BG^2=CG^2$ $\Leftrightarrow$ $AD\perp BE$.

例 14　证明以下性质.

性质 6：记 S 为$\triangle ABC$ 的面积，p 为过$\triangle ABC$ 重心的直线将$\triangle ABC$ 分成两部分的面积差的绝对值，则 $0<p\leq\frac{1}{9}S$.

第 12 讲

三角形的垂心


三角形三条高线必交于一点，称该点为三角形的垂心．锐角三角形的垂心在形内，钝角三角形的垂心在形外，直角三角形的垂心在直角顶点．
三角形的三条高线必交于一点，用赛瓦定理或施坦纳定理容易证明．

定　义

三角形三条高线必交于一点，称该点为三角形的垂心．锐角三角形的垂心在形内，钝角三角形的垂心在形外，直角三角形的垂心在直角顶点．

三角形的三条高线必交于一点，用赛瓦定理或施坦纳定理容易证明．

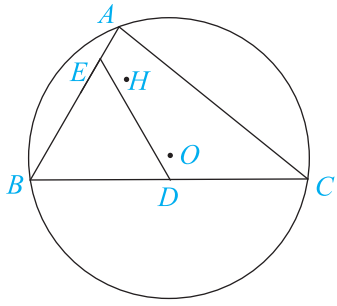
性质 1．顶点与垂心连线必垂直对边，即 $AH \perp BC$，$BH \perp AC$，$CH \perp AB$．

性质 2．设点 H 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，则：$\angle BHC = 180° - \angle A$，$\angle CHA = 180° - \angle B$，$\angle AHB = 180° - \angle C$．

性质 3．设 $\triangle ABC$ 的三条高线为 AD，BE，CF，其中 D、E、F 分别为垂足，垂心为 H，对于点 A，B，C，H，D，E，F 有六组四点共圆，且 H，D，E，F 可为这些圆的根心，有三组（每组四个）相似三角形．

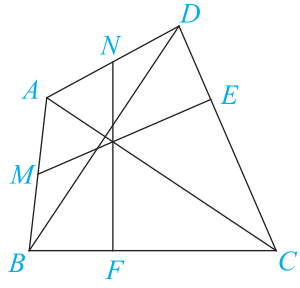
注：若题目中给出了三角形的垂心，可直接利用垂直、相似以及共圆等性质解题，但有时需要挖掘隐藏的垂心或构造垂心．

例 1　如下图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 60°$，O、H 分别是 $\triangle ABC$ 的外心、垂心．点 D，E 分别在 BC，AB 上，使得 $BD = BH$，$BE = BO$，已知 $BO = 1$．求 $\triangle BDE$ 的面积．

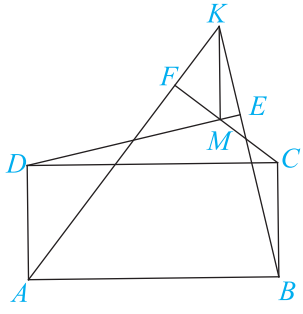


例 2　设锐角△ABC 的三条高 AD，BE，CF 相交于点 H，若 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$．求 $AH\cdot AD+BH\cdot BE+CH\cdot CF$ 的值．

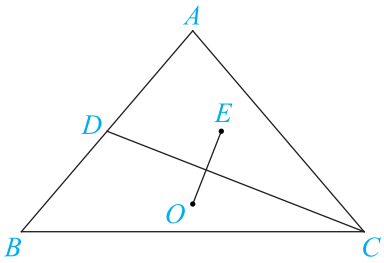
例 3　如下图所示，设凸四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC、BD 互相垂直．过 AB 的中点 M 作 CD 的垂线，过 AD 的中点 N 作 CB 的垂线．证明：这两条垂线的交点在直线 AC 上．



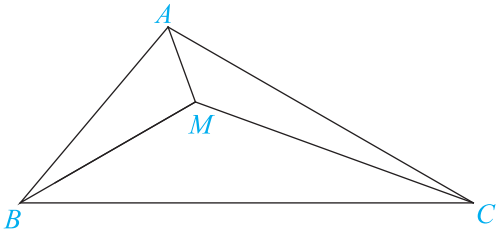
例 4　如下图所示，设四边形 $ABCD$ 是矩形，K 为矩形所在平面上一点，直线 KA 与 KB 均与边 DC 相交．由点 D、C 分别向直线 BK、AK 引垂线，两垂线交于点 M．证明：$MK\perp AB$．



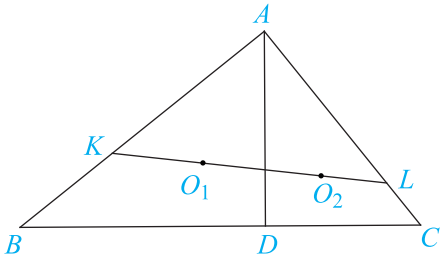
例 5　如下图所示，$\triangle ABC$ 的外心为 O，$AB=AC$，D 点是 AB 的中点，E 是 $\triangle ACD$ 的重心，证明：$OE\perp CD$.



例 6　如下图所示，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=30^\circ$，$\angle ABC=50^\circ$，M 为三角形内一点，$\angle MAC=40^\circ$，$\angle MCB=20^\circ$．求 $\angle MBC$ 的度数.



例 7　利用垂心证明：如下图所示在 Rt$\triangle ABC$ 中，AD 是斜边上的高，连接 $\triangle ABD$ 的内心 $O1$ 与$\triangle ACD$ 的内心 $O2$ 的直线分别与边 AB 及 AC 交于 K，L 点. $\triangle ABC$ 与$\triangle AKL$ 的面积分别记为 S，T，则 $S\geq 2T$.

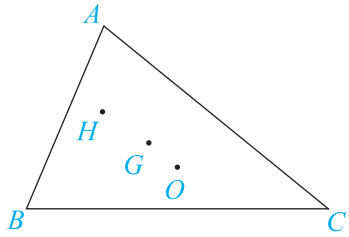


性质 4　三角形的垂心到任一顶点的距离等于外心到对边距离的 2 倍.

证明：

例 8　设 H 点是 $\triangle ABC$ 的垂心，求证：$AH^2+BC^2=HB^2+AC^2=HC^2+AB^2$.

例 9　证明定理：如下图所示三角形的外心、重心、垂心共线.（注：该线叫做三角形的欧拉线）



例 10　在锐角△ABC 中，求证：$\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C>\cos\angle A+\cos\angle B+\cos\angle C$.

性质 5　判定定理：设 H 为锐角△ABC 内一点，H 为△ABC 垂心的充要条件是下列条件之一成立：

（1）H 关于三边的对称点均在△ABC 的外接圆上；

（2）△ABC，△ABH，△BCH，△ACH 的外接圆是等圆；

（3）H 点关于三边中点的对称点均在△ABC 的外接圆上；

（4）$\angle HAB=\angle HCB$，$\angle HBC=\angle HAC$；

（5）$\angle BAO=\angle HAC$，$\angle ABO=\angle HBC$，$\angle ACO=\angle HCB$，其中 O 为△ABC 的外心.

证明：

例 11 证明 H 点为锐角△ABC 的垂心的充要条件是：$HA\cdot HB\cdot AB+HB\cdot HC\cdot BC+HC\cdot HA\cdot CA=AB\cdot BC\cdot CA$.

例 12 垂心组：以三点为三角形的顶点，另一点为该三角形的垂心的四点称为垂心组. 由此即知，垂心组中的四点，每一点都可为以其余三点为顶点的三角形的垂心.

例 13 证明下列命题：

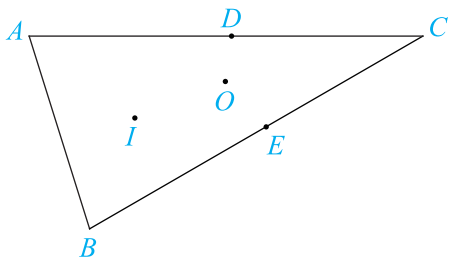
(1) 垂心组的四个三角形的外接圆是等圆；

(2) 垂心组的四个三角形的外心构成一垂心组；

(3) 垂心组的四个三角形的重心构成一个垂心组；

(4) 垂心组位于中间的一点可作为一个三角形的内心，且其余三点作为这个三角形的三个旁心. 反过来，结论亦成立，我们还知三角形的内心、三个旁心构成一垂心组.

例 14　如下图所示，在△ABC 中，O 是外心，I 是内心，$\angle C=30°$，边 AC 上的点 D 与边 BC 上的点 E，使得 $AD=BE=AB$，求证：$OI\perp DE$ 且 $OI=DE$.



例 15　三角形的垂心在三边的射影组成的三角形在此简称为垂足三角形. 证明垂足三角形的下列性质：

（1）锐角三角形的垂心是垂足三角形的内心；

（2）锐角三角形的内接三角形（顶点在原三角形的边上）中，以垂足三角形的周长最短；

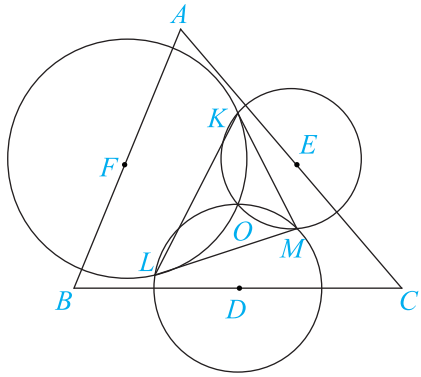
（3）三角形垂足三角形的三边，分别平行于原三角形外接圆在各顶点的切线.

例 16　设 p，R，r，S 分别表示△ABC 的半周长、外接圆半径、内切圆半径及面积，p_1 表示垂足△DEF 的半周长．证明：

（1）$p_1=\dfrac{r}{R}p=2R\sin\angle A\cdot\sin\angle B\cdot\sin\angle C$；

（2）$S_{\triangle DEF}=2S_{\triangle ABC}\cdot\angle\cos A\cdot\angle\cos B\cdot\angle\cos C$．

例 17　如下图所示，设 O 点是锐角△ABC 的外心，分别以△ABC 三边的中点为圆心作过点 O 的圆，这三个圆两两相交于异于 O 点的交点分别为 K, L, M. 求证：点 O 是△KLM 的内心.



第 13 讲

三角形的旁心


与三角形的一边外侧相切，又与另两边的延长线相切的圆叫做三角形的旁切圆，一个三角形有三个旁切圆，旁切圆的圆心简称为三角形的旁心.

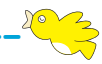


定　义

与三角形的一边外侧相切，又与另两边的延长线相切的圆叫做三角形的旁切圆，一个三角形有三个旁切圆，旁切圆的圆心简称为三角形的旁心.

为了介绍旁心的性质，我们记△ABC 的三边 BC，CA，AB 的边长分别为 a，b，c，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. 分别与 BC, CA, AB 外侧相切的旁切圆圆心记为 I_A，I_B，I_C，其半径记为 r_A，r_B，r_C. $S_{\triangle}$ 表示△ABC 的面积，R，r 分别为△ABC 的外接圆与内切圆半径.

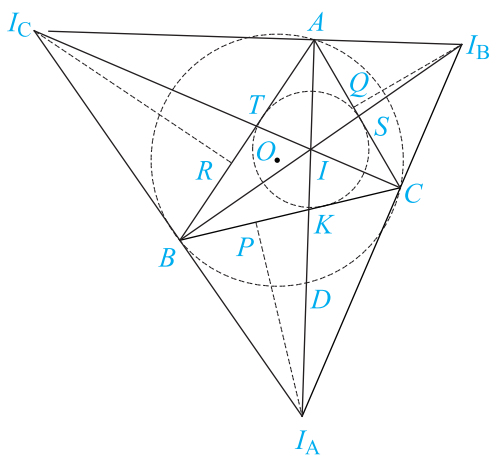
一、旁心与内心密切相关



性质 1　三角形的旁心是其一内角平分线（所在直线）和其他两角的外角平分线的交点，每一个旁心到三边的距离相等.

性质 2　三角形的三个旁心与内心构成一垂心组. 反过来，一个三角形的顶点与垂心是高的垂足三角形的旁心与内心.

证明：

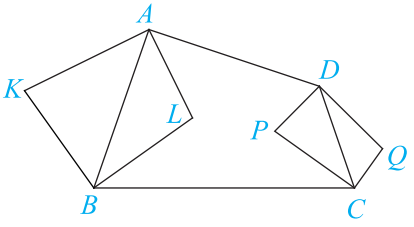


性质 3 （1）$\angle BI_{\mathrm{A}}C=90^{\circ}-\frac{1}{2}\angle A$，$\angle BI_{\mathrm{B}}C=\angle BI_{\mathrm{C}}C=\frac{1}{2}\angle A$，对于顶角 B，C 也有类似的式子；

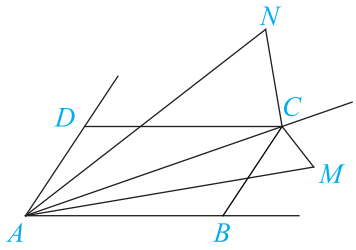
（2）$\angle I_{\mathrm{B}}I_{\mathrm{A}}I_{\mathrm{C}}=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$，$\angle I_{\mathrm{A}}I_{\mathrm{B}}I_{\mathrm{C}}=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$，$\angle I_{\mathrm{A}}I_{\mathrm{C}}I_{\mathrm{B}}=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$.

证明：

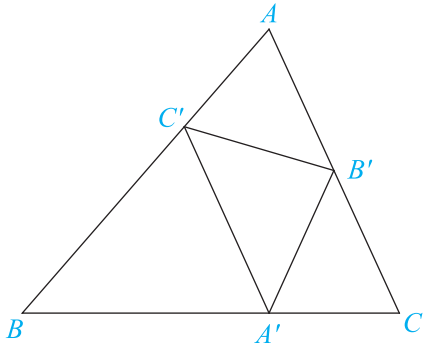
例 1 如下图所示，在凸四边形 $ABCD$ 中，AD 与 BC 不平行，从 A 点引内、外角平分线与从 B 点所引内、外角平分线相交于 K，L 点；又从 C 点引内、外角平分线与从 D 点引内、外角平分线相交于 P，Q 点．求证：K，L，P，Q 四点共线.



例 2　如下图所示，在$\square ABCD$中，M、N分别是$\triangle ABC$、$\triangle ADC$的旁心，求证：$\angle AMC=\angle ANC$.

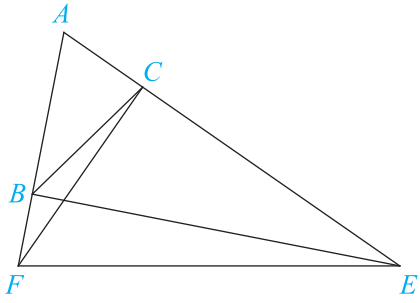


例 3　如下图所示，在$\triangle ABC$的边BC、CA、AB上各有一点A'、B'、C'，且满足$\angle BA'C'=\angle CA'B'$，$\angle CB'A'=\angle AB'C'$，$\angle AC'B'=\angle BC'A'$．证明：$\dfrac{B'C'}{BC}+\dfrac{C'A'}{CA}+\dfrac{A'B'}{AB}\leq\dfrac{3}{2}$.

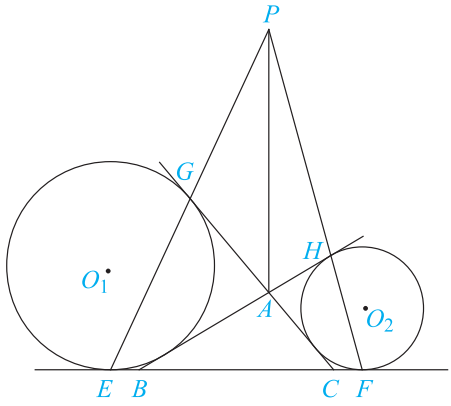


例 4　在△ABC 中，$BC:CA:AB=5:4:3$，三个旁心 A'，B'，C' 分别在 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的内部．求△$A'B'C'$的三边的比．

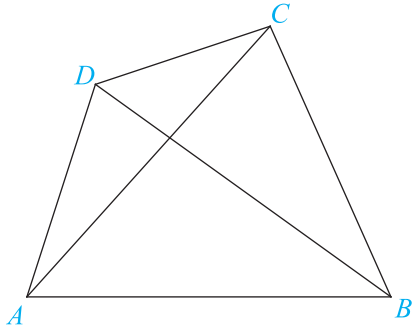
例 5　如下图所示，在锐角△ABC 中，$AB\neq AC$，且 $\cos\angle B+\cos\angle C=1$．点 E、F 分别在射线 AC、AB 上，且满足 $\angle ABE=\angle ACF=90°$．证明：$EF$ 通过△ABC 的一个旁心．



例 6　如下图所示，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 和 $\triangle ABC$ 的三边所在直线都相切，E，F，G，H 为切点，直线 EG 与 FH 交于点 P，求证：$PA \perp BC$．



例 7　如下图所示，在凸四边形 $ABCD$ 中，$AB = AC = BD$．它的四个内角中，恰有两个是锐角，其度数分别为 72 °，66 °．求另外两个内角的度数．

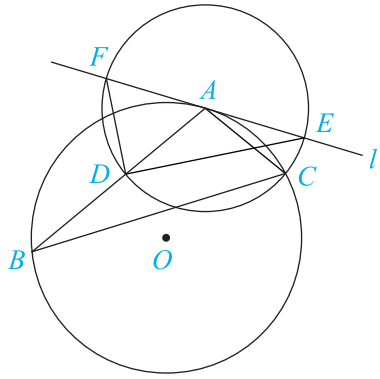


性质 4　设 AI_A 的连线交△ABC 的外接圆于点 D，则 $DI_A = DB = DC$（对于 BI_B，CI_C 也有类似结论）.

证明：

例 8　设△$I_AI_BI_C$ 的外接圆半径为 R'，证明：$R' = 2R$.

例 9　如下图所示，已知△ABC 内接于圆，$AB>AC$，过 A 点作圆的切线 l. 以 A 点为圆心，AC 为半径的圆交 l 于 E、F 两点，且交 AB 于点 D. 求证 DE、DF 分别通过△ABC 的内心和一个旁心.



二、旁心与半周长（P）形影不离.

性质 5　（1）$S_{\triangle}=(p-a)r_A=(p-b)r_B=(p-c)r_C$；

（2）$r_A=4R\sin\dfrac{\angle A}{2}\cdot\cos\dfrac{\angle B}{2}\cdot\cos\dfrac{\angle C}{2}=r\cot\dfrac{\angle B}{2}\cdot\cot\dfrac{\angle C}{2}$，对于 r_B，r_A 有类似结论；

（3）$S_{\triangle}=\dfrac{r_Ar_Br_C}{\sqrt{r_Ar_B+r_Br_C+r_Cr_A}}$；

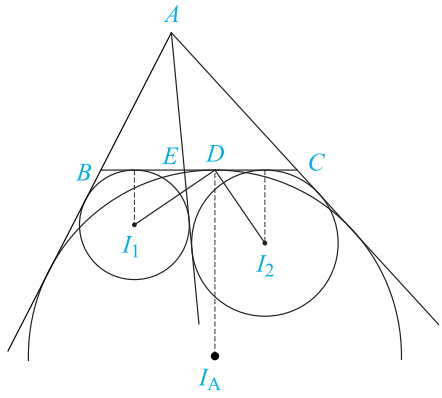
（4）$\dfrac{\sqrt{3}r_Ar_Br_C}{r_A+r_B+r_C}\le S_{\triangle}\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}(r_Ar_Br_C)^{\frac{2}{3}}$.

证明：

性质 6　设$\odot I_A$，$\odot I_B$，$\odot I_C$分别切 BC，CA，AB 于 P，Q，R 点，内切圆$\odot I$分别切 BC, CA, AB 于 K, S, T 点, 则 $BP=AQ=CK=p-c$，$PC=AR=BK=p-b$，$BR=CQ=AT=p-a$.

证明：

例 10　如下图所示, D 点为$\triangle ABC$ 的边 BC 外侧的旁切圆$\odot I_A$ 与 BC 的切点, E 点是 BC 上任一内点，$\triangle ABE$ 及$\triangle ACE$ 与 BC 边相切的旁切圆圆心分别为 I_1，I_2. 求证：$I_1D\perp I_2D$.



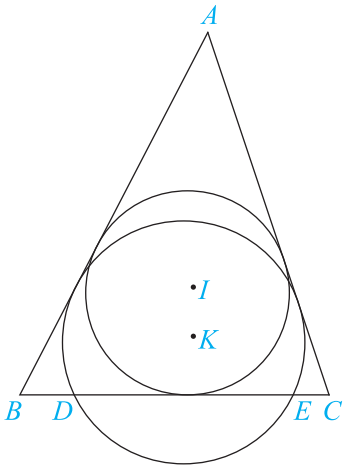
例 11　设 I_A 是△ABC 与边 BC 外侧相切的旁切圆的圆心，过 I_A 的直线交 AB，AC 所在直线分别于 P，Q 点.

证明：$\frac{AB}{AP}\cdot AC+\frac{AC}{AQ}\cdot AB=-BC+AC+AB$.

例 12　M 点是△ABC 的边 AB 上的任意一点，r_1，r_2，r 分别是△AMC，△BMC，△ABC 内切圆的半径，q_1，q_2，q 分别是上述三角形 $\angle ACB$ 内部的旁切圆的半径. 证明：$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\frac{r}{q}$.

例 13　如下图所示，半径为 ρ 的圆与△ABC 两边 AB、AC 相切，其圆心 K 到 BC 边的距离为 d，若设 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，r 和 p 分别表示△ABC 的内切圆半径和半周长.

（1）证明：$a(d-\rho)=2p(r-p)$；



（2）设 $\angle A$ 内的△ABC 的旁切圆半径为 r_A，$\odot K$ 交 BC 边于 D，E 两点. 求证：$DE=\dfrac{\sqrt{rr_A(\rho-r)(r_A-\rho)}}{r_A-r}$.